

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Sintesi di Laurea

# **Analisi numerica di un modello di flusso sanguigno in un segmento arterioso**

Relatore

Prof. Roberto Ferretti

Correlatore

Dott. Giuseppe Pontrelli  
(I.A.C.-C.N.R.)

Laureando

Francesco Verdecchia

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002  
OTTOBRE 2002

Classificazione AMS : 35L45, 35L50, 35Q35, 65M60.

Parole Chiave : Sistemi iperbolici di primo ordine, modelli a costanti concentrate, emodinamica, metodo degli elementi finiti.

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Analisi di un modello per un fluido in un condotto deformabile</b>            | <b>2</b>  |
| 1.1      | Modello unidimensionale . . . . .  | 3         |
| 1.1.1    | Forma conservativa . . . . .   | 4         |
| 1.1.2    | Analisi del sistema in forma normale . . . . .                                   | 4         |
| <b>2</b> | <b>Risoluzione numerica</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1      | Condizioni al bordo . . . . .  | 8         |
| <b>3</b> | <b>Modelli fluidodinamici a costanti concentrate per il sistema circolatorio</b> | <b>11</b> |
| 3.1      | Il modello unidimensionale linearizzato . . . . .                                | 11        |
| 3.2      | L'analogo elettrico . . . . .  | 12        |
| 3.3      | Singolo compartimento . . . . .  | 13        |
| 3.4      | Modelli a più compartimenti . . . . .  | 14        |
| 3.4.1    | Sistema differenziale ordinario . . . . .  | 15        |
| <b>4</b> | <b>Accoppiamento modello 0D-1D</b>   | <b>19</b> |
| 4.1      | Condizioni numeriche al bordo per l'accoppiamento . . . . .                      | 19        |
| <b>5</b> | <b>Test numerici</b>   | <b>21</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>  | <b>25</b> |

# Capitolo 1

## Analisi di un modello per un fluido in un condotto deformabile

Per questa sintesi è stata tralasciata la parte corrispondente al primo e secondo capitolo della tesi riguardante la classificazione di sistemi iperbolici a derivate parziali di primo ordine assieme alle loro due forme di rappresentazione *normale* e *conservativa*, e l'analogia tra il modello che studieremo e quello di altri due casi classici della fluidodinamica.

Questo capitolo è dedicato all'approfondimento del problema che studia il moto di un fluido incomprimibile all'interno di un tubo deformabile. In particolare il fluido in questione è il sangue, e naturalmente i vasi sanguigni i condotti deformabili, all'interno dei quali scorre.

Per ridurre le difficoltà matematiche dovute alla considerazione dei numerosi fattori agenti lungo tutto il sistema circolatorio, lo studio sarà riportato su un tratto specifico di vaso sanguigno e ivi saranno introdotte delle opportune semplificazioni.

Per l'analisi matematica del comportamento e delle caratteristiche dell'intero sistema circolatorio si rimanda al capitolo 3.

## 1.1 Modello unidimensionale

Il modello unidimensionale è ricavato dalle equazioni (1.1) di Navier-Stokes [9]

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} - \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{u} \right) = f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

dove  $\mu$  è il *coefficiente di viscosità*,  $\rho$  la *densità di massa*,  $\mathbf{u}$  la velocità e  $\mathbf{p}$  la pressione nel dominio  $\Omega_t$ , al variare per  $t > 0$ .

Assumendo l'asse di simmetria del vaso allineato con quello  $x$  della direzione longitudinale della velocità  $v$ , poiché si è approssimato l'effetto viscoso ai soli bordi della parete, e di conseguenza considerata trascurabile l'influenza di tutti i termini di secondo ordine lungo le coordinate  $x$  derivanti dal tensore di viscosità, allora le equazioni (1.1) prendono la forma del sistema (1.2), avendo considerate nulle eventuali forze  $f$  agenti esternamente al sistema.

$$\begin{cases} A_t + Q_x = 0 \\ Q_t + \alpha \left( \frac{Q^2}{A} \right)_x + \frac{A}{\rho} p_x + K_R \frac{Q}{A} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

dove per il tratto sanguigno considerato di lunghezza  $l$ , si è stimato, per la teoria di Poiseuille, il *parametro di resistenza*  $K_R = \frac{8\pi\mu}{\rho}$  e indicato con  $\alpha$ , *coefficiente di Coriolis*, il termine che tiene conto della differenza tra l'approssimazione del momento con quantità medie e il suo valore istantaneo, dipendente dalla velocità di profilo e per il quale è sempre vero che  $\alpha \geq 1$ .

La relazione algebrica che chiude il sistema, legando  $p$  ad  $A$ , è data dalla *funzione di deformabilità*  $\Phi_E(A)$ , monotona crescente per l'area  $A$

$$p = \Phi_E(A)$$

Un esempio di funzione  $\Phi_E$  è quella che considera l'*equilibrio statico* nella direzione radiale delle pareti di un tubo cilindrico, con

$h_0$  spessore delle pareti a riposo, trascurabile rispetto al diametro;

$A_0$  valore dell'area di sezione a riposo ;

$E$  modulo di Young, costante;

$\nu$  rapporto di Poisson, costante.

$$\Phi_E(A) = p_0 + \beta \left( \sqrt{A} - \sqrt{A_0} \right) \quad (1.3)$$

dove, per  $\nu = \frac{1}{2}$  il materiale della parete sanguigna è reso incomprimibile, e con  $\beta(x) = \frac{4\sqrt{\pi}h_0E(x)}{3A_0}$  indichiamo una quantità strettamente legata alle proprietà elastiche della parete del vaso. Nel nostro caso  $\beta$  è costante.

### 1.1.1 Forma conservativa

Giunti a questo punto, scriviamo la *forma conservativa* del sistema (1.2) del tipo

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \quad (1.4)$$

Esplicitando la dipendenza da  $A$  di  $p$  e scegliendo  $\alpha = 1$ , che equivale ad assumere la velocità di profilo costante, allora la *forma conservativa* risulta

$$\begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + C^2(A) \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -K_R \frac{Q}{A} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

avendo supposto  $\beta$  costante, considerato  $c = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial \Phi_E}{\partial A}}$  e dove abbiamo espresso la primitiva di  $c$  con  $C^2(A) = \int_{A_0}^A c^2(s) ds$ .

### 1.1.2 Analisi del sistema in forma normale

Ripartire il sistema nella forma normale ha utilità per l'imposizione delle condizioni al bordo dove si utilizza la teoria basata sull'analisi delle variabili e delle curve caratteristiche, mentre per la risoluzione interno all'intervallo gli sarà preferito uno schema di approssimazione numerica di tipo euleriano. Dopo aver riportato il sistema dalla forma conservativa a quella non-lineare

$$\mathbf{u}_t + G\mathbf{u}_x = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \quad (1.6)$$

per  $v = Q/A$  diviene

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \left(\frac{Q}{A}\right)^2 & 2\frac{Q}{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix}$$

Analizzando gli autovalori di  $G$

$$\lambda_{1,2} = v \pm c \quad ,$$

ci rendiamo immediatamente conto dell'iperbolicità del sistema, visto che  $c > v$  (cfr. cap.1).

Passiamo dalla forma nonlineare a quella normale

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Considerando trascurabile l'attrito, come potrebbe approssimarsi per tratti vascolari di sezione maggiore, il vettore  $\mathbf{b}$  è da considerarsi nullo, perchè il termine  $K_R \simeq 0$  e perchè  $\beta$  è costante, dunque

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Le due componenti del nuovo vettore  $\mathbf{w}$  sono invarianti lungo le curve  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  di pendenza  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  in quanto risolvono le equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 \quad . \quad (1.9)$$

Le nuove variabili sono esplicitabili in funzione delle vecchie attraverso le relazioni

$$w_{1,2} = \left( \frac{Q}{A} \right) \pm 2 \sqrt{\frac{2}{\rho}} \beta^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{4}} \quad (1.10)$$

e invertendole

$$A = \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^2 \frac{(w_1 - w_2)^4}{4^5}, \quad Q = A \frac{w_1 + w_2}{2} \quad (1.11)$$

## Capitolo 2

### Risoluzione numerica

La risoluzione numerica del problema consente di approssimare la soluzione reale con un risultato ottenuto dall'evoluzione dello stato iniziale su una griglia di discretizzazione spazio-temporale fino al tempo finale richiesto.

Il metodo numerico preso in considerazione per risolvere l'equazione (1.4), è esplicito e basato sulla discretizzazione delle due variabili indipendenti  $x$  e  $t$ , secondo lo schema di *Taylor-Galerkin*, derivante dalla parte finita dello sviluppo di Taylor intorno a  $t^n$  dello schema di *Lax-Wendroff*.

Nella discretizzazione spaziale, si suddivide l'intervallo d'interesse  $[0, l]$  nei nodi  $x_i$  equidistanziati di un passo  $h$ , e si introduce uno spazio vettoriale  $\mathbf{V}_h$  generato da un numero di funzioni base  $\varphi_i$  pari a quello dei nodi, lineari su ogni elemento  $x_i$ , ad esclusione dei nodi estremi dove le variabili sono descritte dalle condizioni al bordo.

Ponendo

$$\mathbf{f}_{LW} = \mathbf{f} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}_u \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_{LW} = \mathbf{b} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{b}_u \mathbf{b} ,$$

e indicando il prodotto scalare  $\mathcal{L}^2$  con

$$(\mathbf{u}, \varphi) = \int_0^l \mathbf{u} \cdot \varphi dx ,$$

attraverso i vettori  $\varphi_i$  dello spazio  $\mathbf{V}_h$ , siamo in grado di esprimere la *i-esima* relazione che lega le incognite al tempo  $t^{n+1}$  alle quantità note al  $t^n$ .

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{n+1}, \varphi_i) &= (\mathbf{u}^n, \varphi_i) + \Delta t \left( \mathbf{f}_{LW}^n, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) - \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{b}_u^n \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial x}, \varphi_i \right) + \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{f}_u^n \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \Delta t (\mathbf{b}_{LW}^n, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \mathbf{V}_h. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Osserviamo immediatamente che per i valori di  $\mathbf{u}$  al bordo il discorso è a sé stante e per questo sarà oggetto del prossimo paragrafo.

Di seguito sono riportate alcune osservazioni riguardanti le caratteristiche di tale schema.

**Osservazione 2.1.** Grazie all'introduzione delle funzioni base  $\varphi_i$  dello spazio  $\mathbf{V}_h$  in (2.1), gli integrali dovuti al prodotto vettoriale divengono delle semplici relazioni lineari, che sono descritte da una matrice a banda tridiagonale.

**Osservazione 2.2.** Poiché lo schema (2.1) riguarda entrambe le componenti di  $\mathbf{u}$ , avremo che il numero delle relazioni risultanti sarà raddoppiato, e quindi due volte quello dei nodi utilizzati per la discretizzazione.

Nell'approccio numerico al problema con e senza condizioni periodiche al bordo, sono state considerate due ipotesi distinte su (1.4) che implicano dei cambiamenti nello schema

**Caso non viscoso  $\rightarrow \mathbf{K}_r = \mathbf{0}$**

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0$$

secondo cui  $\mathbf{f}_{LW} \equiv \mathbf{f}$ ,  
dunque lo schema (2.1) risulta

$$(\mathbf{u}^{n+1}, \varphi_i) = (\mathbf{u}^n, \varphi_i) + \Delta t \left( \mathbf{f}^n, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) - \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{f}_u^n \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right), \quad \forall \varphi_i \in \mathbf{V}_h. \quad (2.2)$$

**Caso viscoso  $\rightarrow \mathbf{K}_r \neq \mathbf{0}$**

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{b}(\mathbf{u})$$

condizione per la quale non si annulla il vettore  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  di (1.4), quindi la (2.1) è sviluppata come

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}^{n+1}, \varphi_i) &= (\mathbf{u}^n, \varphi_i) + \Delta t \left( \mathbf{f}^n, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{f}_u^n \mathbf{b}^n, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \\
&- \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{b}_u^n \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial x}, \varphi_i \right) - \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{f}_u^n \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \\
&+ \Delta t (\mathbf{b}^n, \varphi_i) + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{b}_u^n \mathbf{b}^n, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \mathbf{V}_h. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

**Osservazione 2.3.** Nell'effettuare i test numerici è stata adottata la seguente condizione di stabilità

$$\frac{\Delta t \sup_{0 < x < l} (\max_{i=1,2} |\lambda_i|)}{h} < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ottenuta da un'analisi di Von Neumann sulla stabilità lineare per gli schemi di finiti elementi su di una griglia equispaziata con passo  $h$ . [10]

## 2.1 Condizioni al bordo

Dovendo considerare il problema in un segmento finito sorge la necessità di introdurre con questo paragrafo le condizioni al bordo.

Osserviamo che è equivalente imporre le condizioni al bordo al sistema attraverso le nuove variabili  $\mathbf{w}$  o quelle di partenza  $\mathbf{u}$ , viste le relazioni (1.10) e (1.11) che le legano, purchè ne siano note almeno due per estremità. Inoltre, affinché il problema sia ben posto, si potranno utilizzare due generi di condizioni al bordo:

- una è di tipo periodico, ovvero si impone che la situazione all'inizio e al termine del tratto sanguigno sia la stessa;
- l'altra impone su ogni bordo le variabili caratteristiche entranti, che si aggiungono a quelle uscenti, note per estrapolazione.

Descriviamo ora le condizioni al bordo da adottare nel caso di non periodicità, utilizzando il metodo di estrapolazione.

Per quanto visto nel capitolo precedente, gli autovalori  $\lambda_{1,2}$  sono tra loro distinti e di segno opposto (assumiamo  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ ). Grazie al metodo delle caratteristiche dunque è sufficiente utilizzare una condizione al bordo per una singola variabile su ognuna delle sezioni limite  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , ed è necessario affinché il problema sia ben posto.

Dunque un esempio generico di dati al bordo è fornito dall'imposizione delle seguenti funzioni per le variabili caratteristiche  $w_{1,2}$

$$\begin{cases} w_1(t) = g_1(A(t)) & \text{per } x = 0, t > 0 \\ w_2(t) = g_2(Q(t)) & \text{per } x = l, t > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Finchè non sono noti i valori di entrambe le variabili su ciascun bordo, nessun metodo di risoluzione può procedere, e perciò bisogna tener conto di come le rimanenti due condizioni devono essere ricavate perchè il problema sia ben posto. La tecnica basata sull'estrapolazione delle curve caratteristiche uscenti attraverso i bordi del rettangolo di definizione, ci permette di conoscere proprio le condizioni mancanti, nella maniera che segue.

Consideriamo la sezione  $\Gamma_1$  (per  $\Gamma_2$  sarà l'analogo).

Supponiamo di conoscere al tempo  $t^n$  i valori delle variabili  $w_{1,2}^n$ , e quindi di  $w_{1,2}^n$  su tutto  $[0, l]$ .

Dalla linearizzazione di (1.8) la soluzione al tempo successivo  $t^{n+1}$

$$w_2^{n+1}(0) = w_2^n(0 - \lambda_2^n(0)\Delta t)$$

$$(\text{analogamente per } \Gamma_1 \text{ avremo } w_1^{n+1}(0) = w_1^n(l - \lambda_1^n(l)\Delta t)).$$

Dunque, attraverso un'estrapolazione di primo ordine della caratteristica  $\lambda_2$  uscente, a partire dal valore noto all' $n$ -esimo passo della variabile  $w_2$ , ci siamo ricavati l'aggiornamento della variabile stessa sulla sezione  $\Gamma_1$ .

Per la scelta della  $g_1$ , secondo la combinazione delle (1.10),

$$w_1^{n+1} = g_1(t^{n+1}) = w_2^{n+1}{}_{extr} + 4\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{\Phi(t^{n+1}) + \beta\sqrt{A_0}} \right) \quad (2.5)$$

con  $p_0 = 0$  nella funzione  $\Phi_E$  (1.3). La funzione  $g_2(t)$  sull'estremità destra è stata scelta uguale ad un valore costante (quello iniziale  $w_2^0(l)$ ), per simulare

un condotto di lunghezza infinita

$$w_2^{n+1} = g_2(t^{n+1}) = w_2^0 .$$

Arrivati a questo punto, grazie all'imposizione della  $p$  in ingresso ( e perciò anche della  $A$ ), per mezzo delle funzioni  $g_{1,2}$  e delle estrapolazioni, siamo in grado di conoscere il valore al tempo aggiornato delle variabili di partenza  $A$  e  $Q$  passando per quelle caratteristiche  $w_{1,2}$ .

## Capitolo 3

# Modelli fluidodinamici a costanti concentrate per il sistema circolatorio

Per giungere alle equazioni del modello a cui il titolo di questo capitolo si riferisce, passiamo brevemente attraverso la formulazione delle equazioni per la linearizzazione del modello unidimensionale, citando quelle del suo analogo elettrico, per poi parlare di quelle di un singolo compartimento.

### 3.1 Il modello unidimensionale linearizzato

Le equazioni di conservazione risultano

$$-p_x = R(x)Q + L(x)Q_t \quad (3.1)$$

$$-Q_x = G(x)\rho + C(x)p_t \quad (3.2)$$

dove

$R$  = resistenza per unità di lunghezza,  $R(x) = -f \frac{\rho}{Q}$  ;

$G$  = dispersione per unità di lunghezza (considerando il deflusso dovuto a diramazioni), ha le dimensioni dell'inverso di una resistenza (per unità di

lunghezza) ed è maggiore o minore di zero a seconda degli afflussi o deflussi presenti nel tubo;

$$L = \text{inerzia per unità di lunghezza, } L(x) = \frac{\rho}{A(x)} ;$$

$$C = \text{dilatabilità del tubo, } C(x) = \frac{\partial A}{\partial p} .$$

### 3.2 L'analogo elettrico

Nell'analogo elettrico la circolazione sanguigna è descritta con un sistema elettrico  $RCL$  in cui

- l' induttanza corrisponde all'inerzia del fluido
- la resistenza corrisponde alle viscosità
- la capacitanza è analoga all' elasticità delle pareti dei vasi.

Dunque, le equazioni (3.1) e (3.2) sono formalmente identiche alle equazioni di propagazione di un impulso elettrico lungo una linea di trasmissione, le cosiddette *equazioni del telegrafo* valide per un cavo uniforme:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = R'i + L'\frac{\partial i}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G'V + C'\frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.4)$$

dove

$V$  = voltaggio

$i$  = corrente

$R'$  = resistenza per unità di lunghezza

$L'$  = induttanza per unità di lunghezza

$C'$  = capacitanza per unità di lunghezza

$G'$  = conduttanza per unità di lunghezza

Perciò compiendo tale analogia, le equazioni (3.1) e (3.2) si leggono come le (3.3) e (3.4) assumendo che

$$\begin{aligned}
\text{pressione } p &\sim \text{potenziale } V \\
\text{flusso } Q &\sim \text{corrente } i \\
\text{volume } (= \int Q dt) &\sim \text{carica } q (= \int i dt) \\
\text{resistenza } R &\sim \text{resistenza } R' \\
\text{inerzia } L &\sim \text{induttanza } L' \\
\text{distensibilità } C &\sim \text{capacitanza } C' \\
\text{dispersione } G &\sim \text{conduttanza } G'
\end{aligned}$$

### 3.3 Singolo compartimento

Ciò che avviene in un singolo circuito è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}
p_{in} - p_{out} &= L \frac{d\bar{Q}}{dt} + R\bar{Q} \\
Q_{in} - Q_{out} &= \frac{C}{2} \frac{dp_{in}}{dt} + \frac{C}{2} \frac{dp_{out}}{dt}
\end{aligned}$$

con i valori mediati sulla lunghezza

$$\bar{Q} = \frac{1}{l} \int_0^l Q dx \quad \bar{p} = \frac{1}{l} \int_0^l p dx .$$

Ridefinite  $Rl \rightarrow R, Cl \rightarrow C, Ll \rightarrow L$ , per la risoluzione è necessario accoppiare tale sistema con un altro al fine di avere ulteriori condizioni, perchè il

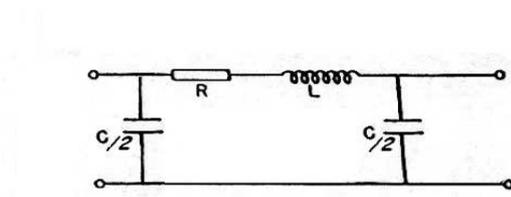


Figura 3.1: Il circuito  $\pi$

numero di equazioni è inferiore al numero delle incognite. L'analogo elettrico di tale sistema è illustrato in Fig.(3.1) .

### 3.4 Modelli a più compartimenti

Il modello *lumped*, ottenuto dalla concatenazione di più elementi del tipo appena visto, descrive l'intero sistema circolatorio, e costituisce una valida semplificazione rispetto al modello fluidodinamico originale.

Il cuore è rappresentato per mezzo di due condensatori variabili nel tempo che simulano l'attività ventricolare e da due diodi che riproducono il comportamento delle valvole.

Il circuito che si ricava è illustrato in Fig. (3.2).

Il sistema vascolare è suddiviso in sei sezioni:

- circolazione arteriosa sistemica:  $R_1C_1$  e  $R_2L_1C_2$
- microcircolazione sistemica:  $R_3$
- circolazione venosa sistemica:  $L_2C_3R_4$
- microcircolazione polmonare:  $R_7$
- circolazione arteriosa polmonare:  $R_3L_2C_3$  e  $L_4R_7$
- circolazione venosa polmonare:  $L_4C_6R_8$

Inoltre con le incognite di indice dispari  $X_1, X_3, X_5, X_7, X_9, X_{11}$  , indichiamo la pressione alle estremità dei vari compartimenti, con quelle di indici pari  $X_2, X_4, X_8, X_{10}$  , i flussi nei vari distretti, e per finire con  $X_6, X_{12}$  , la variazione di volume del ventricolo destro e sinistro rispetto ad un volume di riferimento  $V_0$  e con  $LV, RV$ , pressioni ventricolari, sinistra e destra.

Le  $S_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) sono gli stati delle valvole: rappresentano lo stato dei due diodi che simulano le valvole cardiache e sono così definite

$$S_i = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i \leq 0 \\ 1 & \text{se } z_i > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

(dove le  $z_i$  forniscono la caduta di pressione nei rami contenenti le valvole).  
Le variabili  $z_i$  (con  $i = 1, \dots, 4$ ) sono così definite

$$\begin{aligned} z_1 &= U_s(t) + X_{12} \cdot E_l(t) - X_1 \\ z_2 &= X_5 - U_d(t) - X_6 \cdot E_r(t) \\ z_3 &= U_d(t) + X_6 \cdot E_r(t) - X_7 \\ z_4 &= X_{11} - U_s(t) - X_{12} \cdot E_l(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

con  $U_s =$  pressione isovolumica sinistra

$U_d =$  pressione isovolumica destra

$E_l =$  elastanza sinistra

$E_r =$  elastanza destra

L'elevata pressione sulla parete arteriosa della circolazione sistemica e polmonare è caratterizzata da un modello a doppio compartimento (rispettivamente  $C_1-C_2$  e  $C_4-C_5$ ), separate dalle corrispondenti parti a bassa pressione ( $C_3$  e  $C_6$ ). Da ciò risulta un sistema non lineare variabile nel tempo caratterizzato da dodici variabili di stato, rappresentanti variazioni di volume, pressioni e flussi.

Le equazioni differenziali che descrivono il modello elettrico del sistema circolatorio sono rappresentate dalla forma matriciale del sistema differenziale ordinario (3.7).

### 3.4.1 Sistema differenziale ordinario

Le dodici equazioni differenziali ottenute dalle leggi di conservazione di Kirchhoff formano il sistema differenziale seguente

$$\begin{cases} \dot{X} = A(X, t)X + d(t) \\ X(0) = X_0 \quad (\text{dato iniziale}) \end{cases} \quad (3.7)$$

ove  $d$  è il seguente vettore colonna dei termini noti:

$$d = \begin{pmatrix} S_1 \cdot \frac{U_s}{C_1(R_1 + R_l)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_2 \cdot \frac{U_d}{R_4 C_3} \\ -S_2 \cdot \frac{U_d}{R_4} - S_3 \cdot \frac{U_d}{R_r + R_5} \\ S_3 \cdot \frac{U_d}{(R_r + R_5)C_4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_4 \cdot \frac{U_s}{R_8 C_6} \\ -S_4 \cdot \frac{U_s}{R_8} - S_1 \cdot \frac{U_s}{R_l + R_1} \end{pmatrix}$$

ed  $A \in \mathcal{M}_{12,12}(\mathbb{R})$  è la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{-1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,12} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{-R_2}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & \frac{-1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-R_3}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & a_{5,5} & a_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & a_{7,7} & \frac{-1}{C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & \frac{-R_6}{L_3} & \frac{-1}{L_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 & \frac{-1}{C_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_4} & \frac{-R_7}{L_4} & \frac{-1}{L_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_6} & a_{11,11} & a_{11,12} \\ a_{12,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,11} & a_{12,12} \end{pmatrix}$$

La pressione isovolumica e l'elastanza del ventricolo variano nel tempo secondo le seguenti leggi

$$U(t) = U_0 \alpha(t)$$

$$E(t) = E_d + E_s \alpha(t)$$

dove

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi t/t_s)] & 0 \leq t \leq t_s \quad (\textit{sistole}) \\ 0 & t_s \leq t \leq t_c \quad (\textit{diastole}) \end{cases}$$

e  $t_s$  e  $t_c$  sono il periodo sistolico e cardiaco, rispettivamente. Inoltre la pressione ventricolare è data da

$$P_V = \begin{cases} U(t) + E(t) \cdot (\mathcal{V} - \mathcal{V}_0) + R\dot{\mathcal{V}} & (\textit{sistole}) \\ E_d \cdot (\mathcal{V} - \mathcal{V}_0) & (\textit{diastole}) \end{cases} \quad (3.8)$$

ove

$\mathcal{V}_0$  = volume di riferimento intorno al quale si effettua la linearizzazione

$\mathcal{V}$  = volume del ventricolo

$\dot{\mathcal{V}}$  = derivata temporale di  $\mathcal{V}$

$U(t)$  = pressione isovolumica sul volume  $\mathcal{V}$ ,

$E(t)$  = elastanza del ventricolo (inverso della compliance =  $dV/dP$ )

$R$  = resistenza che rappresenta la viscosità delle pareti del miocardio

Gli elementi mancanti nella matrice  $A$  sono i seguenti:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -S_1 \cdot \frac{1}{C_1 \cdot (R_l + R_1)} & a_{1,12} &= S_1 \cdot \frac{E_s}{C_1 \cdot (R_l + R_1)} \\ a_{5,5} &= -S_2 \cdot \frac{1}{C_3 \cdot R_4} & a_{5,6} &= S_2 \cdot \frac{E_d}{C_3 \cdot R_4} \\ a_{6,5} &= S_2 \cdot \frac{1}{R_4} & a_{6,6} &= -S_2 \cdot \frac{E_d}{R_4} - S_3 \cdot \frac{E_d}{R_r + R_5} \\ a_{6,7} &= S_3 \cdot \frac{1}{R_r + R_5} & a_{7,6} &= S_3 \cdot \frac{E_d}{C_4 \cdot (R_r + R_5)} \\ a_{7,7} &= -S_3 \cdot \frac{1}{C_4 \cdot (R_r + R_5)} & a_{11,11} &= -S_4 \cdot \frac{1}{C_6 \cdot R_8} \\ a_{11,12} &= S_4 \cdot \frac{E_s}{C_6 \cdot R_8} & a_{12,1} &= S_1 \cdot \frac{1}{R_1 + R_l} \\ a_{12,11} &= S_4 \cdot \frac{1}{R_8} & a_{12,12} &= -S_4 \cdot \frac{E_s}{R_8} - S_1 \cdot \frac{E_s}{R_l + R_1} \end{aligned}$$

$E_d$  ,  $E_s$  ,  $U_d$  e  $U_s$  (prima identificati) dipendono da un parametro  $\alpha(t)$

(anch'esso definito precedentemente) nel modo che segue

$$U_s = U_{s0} \cdot \alpha(t) \quad U_d = U_{d0} \cdot \alpha(t)$$

$$E_s = E_{sD} + E_{sS} \cdot \alpha(t) \quad E_d = E_{dD} + E_{dS} \cdot \alpha(t)$$

ove  $U_{s0}$  e  $U_{d0}$  sono la pressione isovolumica sinistra e destra al volume  $V_0$  e  $E_{sD}$ ,  $E_{sS}$ ,  $E_{dD}$  e  $E_{dS}$  sono rispettivamente l'elastanza diastolica e sistolica sinistra e l'elastanza diastolica e sistolica destra.

Per quanto visto, la matrice  $A = A(X, t)$  risulta in dipendenza della soluzione  $X$  e del tempo  $t$ , perciò possiamo concludere che varia nel tempo. In particolare  $A(X, t)$  è una matrice tridiagonale con l'aggiunta dei termini  $a_{1,12}$  e  $a_{12,1}$ , per compiere la chiusura del circuito. Per opportuni valori delle costanti  $R$ ,  $C$ ,  $L$ ,  $E$  e  $U$  (riportati sulla tesi), la matrice  $A$  sarà completamente definita.

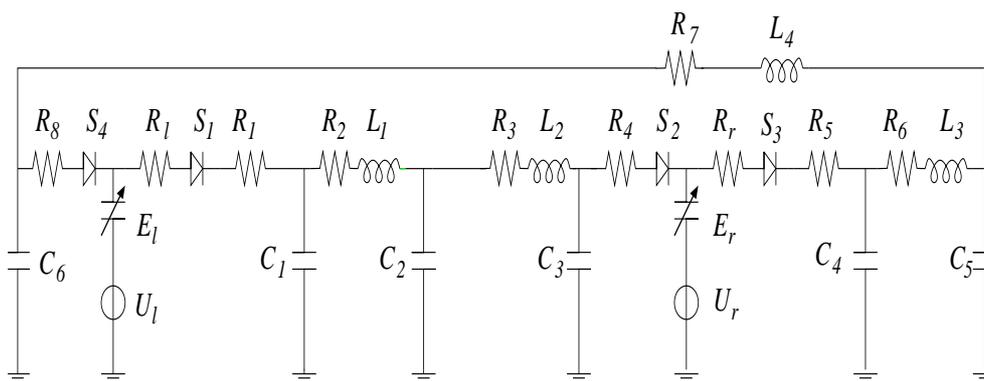


Figura 3.2: Modello di una rete chiusa per l'intero sistema cardiovascolare

# Capitolo 4

## Accoppiamento modello 0D-1D

L'accoppiamento del modello unidimensionale di un tratto di arteria con un modello lumped per l'intero sistema circolatorio è un modello completo che tiene conto del bilancio di flussi indotto da un circuito chiuso e risolve localmente solo una porzione di arteria. Nello svolgere tale operazione, i punti di unione sono accuratamente inseriti in modo da non avere una riflessione delle onde. È possibile innestare il tratto 1D in vari punti dell'albero circolatorio e come anticipato nell'introduzione alla tesi, per questo lavoro si è scelto di simulare con il modello 1D la parte discendente dell'aorta, innestandolo nel rispettivo compartimento della rete.

### 4.1 Condizioni numeriche al bordo per l'accoppiamento

Nell'interazione tra i due modelli fin qui studiati, le situazioni al bordo sono di fondamentale importanza perchè sono precisamente il punto di interconnessione, dove fattivamente avviene lo scambio di informazioni. Infatti anche il modello 0D va considerato con due sezioni limite: quella di uscita coincidente con quella di entrata del modello 1D e viceversa.

Denominato con (a) il sistema di equazioni differenziali ordinarie relativo ai compartimenti del modello lumped e con (b) il sistema di equazioni a

derivate parziali che descrive la fluidodinamica del tratto unidimensionale, l'algoritmo di integrazione per la risoluzione di questo modello, che prevede uno scambio di informazioni tra le due sezioni, come descritto qui in seguito, garantisce la continuità delle variabili:

1. le variabili del sistema lumped sono arbitrariamente inizializzate. I valori di  $Q_m$  e  $p_v$  si hanno come soluzione di equilibrio del sistema (b), ponendo come condizioni al bordo  $p_m = X_3(0)$  ed  $Q_v = X_4(0)$ .

2. Risoluzione del sistema (a): basandosi sulle equazioni del circuito si calcolano le derivate temporali delle variabili lumped al tempo  $t$ . Risolvendo il sistema di equazioni ordinarie si ottengono poi valori aggiornati all'istante  $t + \Delta t$ .

3. Risoluzione del sistema (b): le condizioni al bordo dettate al tempo  $t + \Delta t$  permettono la risoluzione del sistema (b) e calcolano i nuovi valori di  $Q_m$  e  $p_v$ . Viene poi aggiornato il profilo della parete.

4. Sono a questo punto note le variabili del sistema (a) al tempo  $t + \Delta t$  e la procedura può essere rimandata al punto 2.

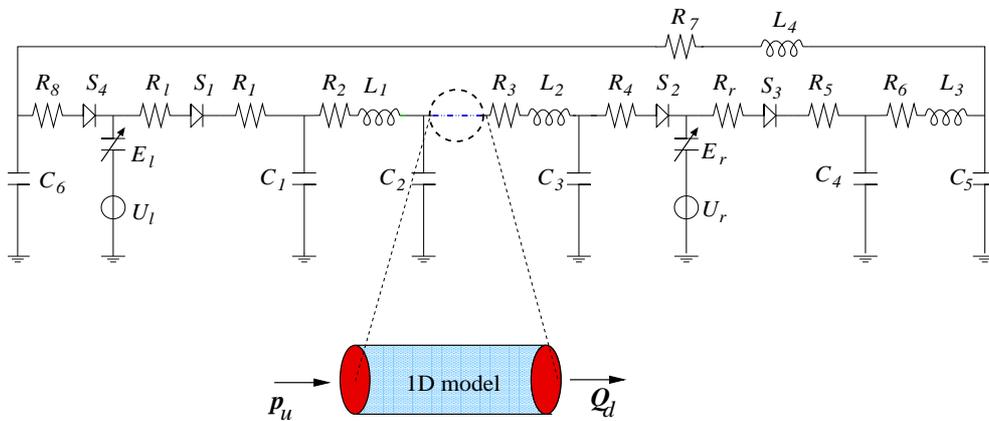


Figura 4.1: Innesto del modello unidimensionale all'interno del terzo compartimento, contenente la parte discendente dell'aorta.

# Capitolo 5

## Test numerici

Di tutti i test riportati nella tesi per i diversi casi, qui ne viene riportato solo quello conclusivo che in un certo senso racchiude in sé i rimanenti, ovvero quello dell'interazione tra i due modelli.

### Accoppiamento 0D - 1D

La propagazione della pulsazione ondosa si manifesta attraverso l'oscillazione della pressione (e quindi dell'area  $A$ ) e del flusso  $Q$ .

Nell'effettuare questo test è stato considerato il tubo lungo  $320\text{ cm}$ , con un valore del periodo di pulsazione ridotto a  $0.5\text{ sec.}$  da quello fisiologico di  $0.8\text{ sec.}$  di riferimento.

| Cond. al bordo        | schema         | intervallo          | num. nodi ( $\Delta_x$ )   | passo $\Delta_t$                 | periodo          |
|-----------------------|----------------|---------------------|----------------------------|----------------------------------|------------------|
| <i>non periodiche</i> | <i>viscoso</i> | $0 - 320\text{ cm}$ | 246 ( $1.3008\text{ cm}$ ) | $0.8 \times 10^{-4}\text{ sec.}$ | $0.5\text{ sec}$ |

| tempo iniziale  | tempo finale      | intervallo grafici   |
|-----------------|-------------------|----------------------|
| $0\text{ sec.}$ | $0.5\text{ sec.}$ | $0.0455\text{ sec.}$ |

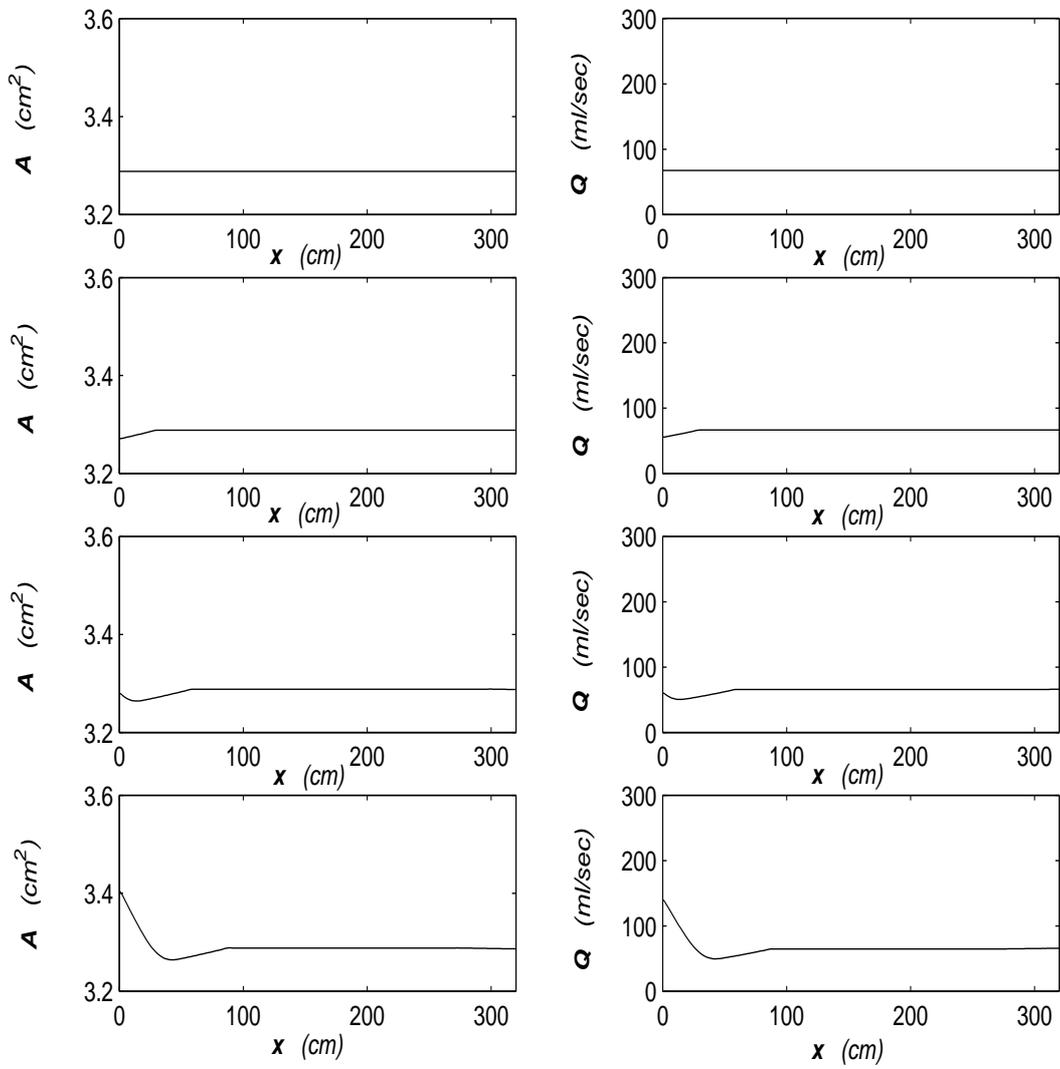


Figura 5.1: Accoppiamento: profili delle due variabili dal tempo  $t = 0$  a  $t = 0.1364$ .

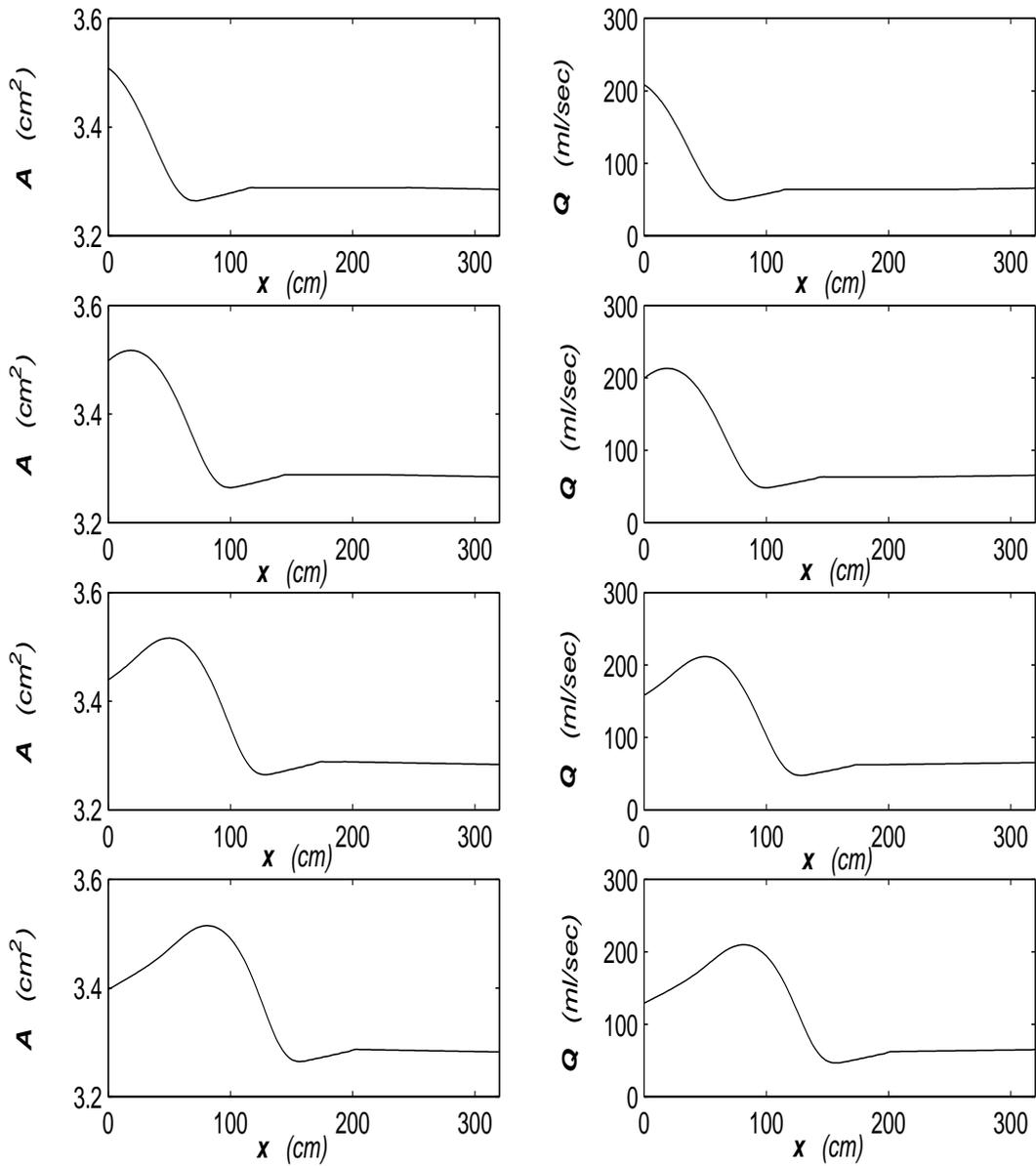


Figura 5.2: Accoppiamento: profili delle due variabili dal tempo  $t = 0.1818$  a  $t = 0.3182$ .

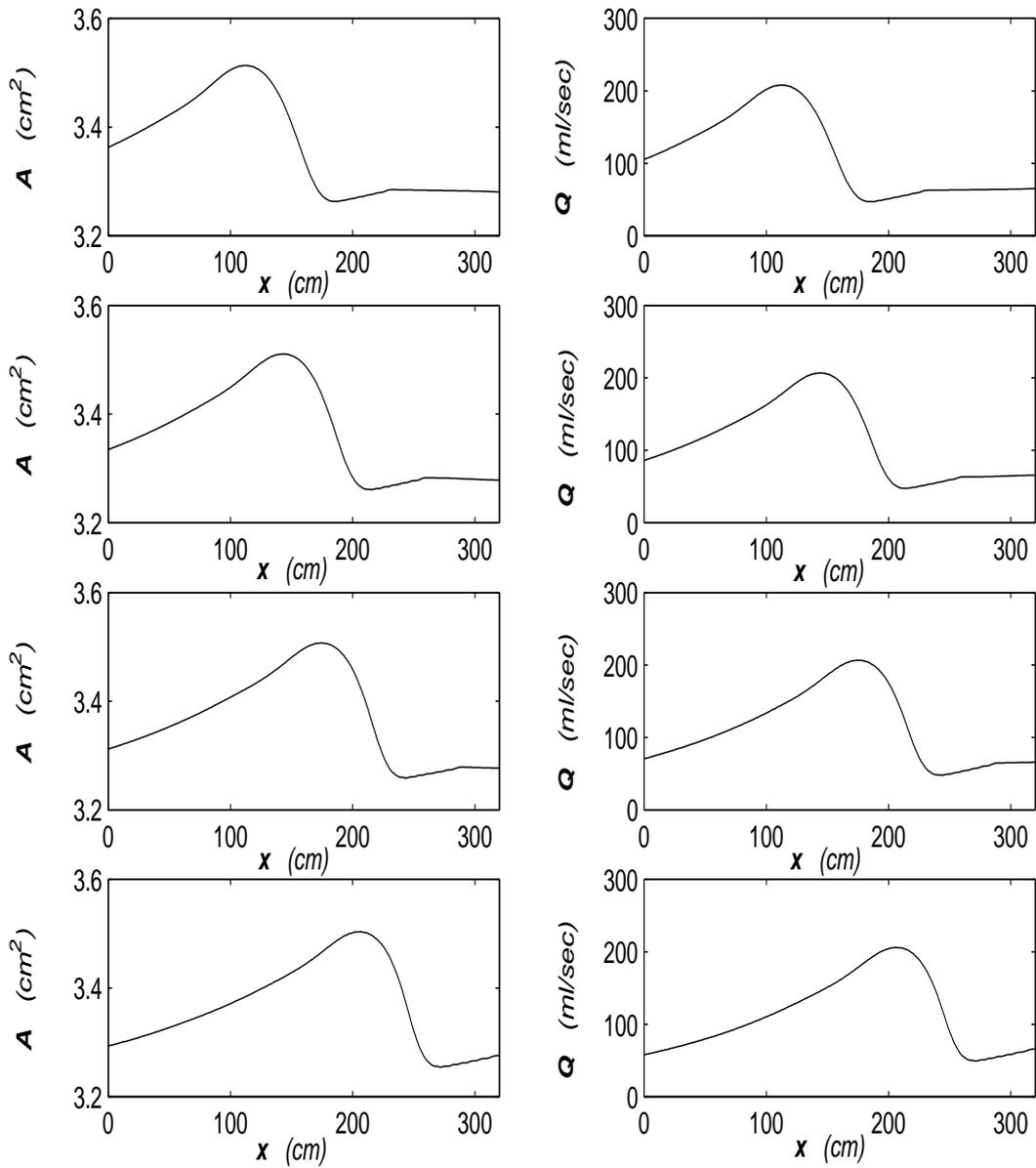


Figura 5.3: Accoppiamento: profili delle due variabili dal tempo  $t = 0.3636$  a  $t = 0.5$  .

# Bibliografia

- [1] R.J. LeVeque *Numerical methods for conservative laws*, Birkhäuser Verlag, 1992 .
- [2] G.B.Whitam F.R.S. *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, 1974 .
- [3] V.Casulli, D.Greenspan *Numerical analysis for applied mathematics, science, and engineering*, Addison-Wesley, 1988.
- [4] E.C.Zachmanoglou, D.W.Thoe *Introduction to partial differential equations with applications*, Dover, N.Y. 1986.
- [5] L.C.Evans *Partial differential equations*, AMS, Rhode Island 1991.
- [6] L.D.Landau, E.M.Lifshitz *Fluid mechanics*, Pergamon Press, Elmsford, N.Y.,1959.
- [7] I.G.Petrovskii *Partial differential equations*, W.B.Saunders Co., Philadelphia 1967
- [8] G.Pontrelli-L.Ansini *Wave propagation in deformable tubes with applications in hemodinamics*
- [9] L. Formaggia , F. Nobile , A. Quarteroni , A. Veneziani *Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis*, T. Miyoshi Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [10] L. Formaggia , F. Nobile , A. Quarteroni *A one dimensional model for blood flow: application to vascular prosthesis*, Springer-Verlag, 1999

- [11] L.Corrias *Schemi numerici per le leggi di conservazione*, Dip.to di matematica G.Castelnuovo, Università di Roma La Sapienza, 1990
- [12] R.D'Anzeo, *Modelli matematici e metodi numerici per il sistema circolatorio*, Dip.to di matematica, Università RomaTre, 2001
- [13] F.Taliani *Modelli matematici per il sistema circolatorio*, Dip.to di matematica, Università RomaTre, 2002