## 4.3 Risposte commentate

**4.1.1** Per rispondere alla domanda posta occorre ricordare la nota proprietà dei triangoli: "in ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due". Di conseguenza le misure assegnate per le lunghezze dei segmenti devono soddisfare le tre disuguaglianze

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b.$$

Tali relazioni sono note col nome "disuguaglianze triangolari".
Per costruire graficamente il triangolo si può procedere come segue. Fissato uno dei tre segmenti assegnati, sia per esempio $AA'$ quello di misura $a$, si traccino le circonferenze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ che hanno rispettivamente raggi di misura $b$ e $c$ e i cui centri sono rispettivamente sugli estremi $A$ e $A'$ del segmento.
Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ si incontrano in due punti distinti $P$ e $Q$, i triangoli $AA'P$ oppure $AA'Q$ sono le figure cercate. Se $P=Q$ (e quindi $P$ è sulla retta $AA'$) oppure $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ non hanno punti in comune, il triangolo cercato non esiste.
Gli ultimi due casi si verificano rispettivamente nelle seguenti eventualità. Si ha $P=Q$ se al posto di una delle disuguaglianze si ha una identità e quindi uno dei segmenti è uguale alla somma degli altri due. Le circonferenze $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono prive di punti in comune se una delle tre disuguaglianze non è verificata, senza che valga al suo posto una identità. Si osservi in proposito che, essendo $a,b,c$ maggiori di zero, al piú una delle tre disuguaglianze può essere violata.
Lo studente è invitato a realizzare effettivamente la costruzione indicata, assumendo: $a=2$, $b=3$, $c=4$ (misure espresse rispetto ad una unità di misura prefissata).

**4.1.2** Si tratta di un classico esercizio la cui soluzione si trova su ogni libro di testo. Ricordiamo che il centro della circonferenza inscritta (incentro) è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli del triangolo; il centro della circonferenza circoscritta (circocentro) è il punto di incontro degli assi dei lati del triangolo. Lo studente è fortemente invitato a realizzare effettivamente la costruzione richiesta e ad accompagnarla con una breve giustificazione *scritta*, senza fare ricorso in un primo momento ad alcun libro. Terminato l'esercizio sarà opportuno controllare sul libro di testo la correttezza e la adeguatezza del procedimento seguito.

**4.1.3 a)** Sia $ABCD$ il quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro $O$ (Figura 6). Ricordiamo ora il noto teorema "ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco".

Consideriamo quindi gli angoli $B\overset{\wedge}{A}D$ e $B\overset{\wedge}{C}D$ del quadrilatero: ciascuno di essi è la metà di uno dei due angoli al centro individuati dalle semirette $OB$ e $OD$ (l'uno convesso e l'altro concavo o, eventualmente, entrambi piatti).

Poiché la somma di questi due angoli al centro è in ogni caso un angolo giro, la somma $B\overset{\wedge}{A}D+B\overset{\wedge}{C}D$ risulta uguale ad un angolo piatto.

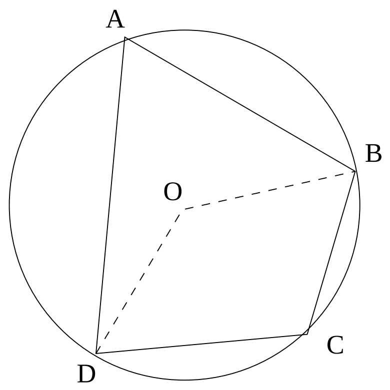


Figura 6.

**b)** Sia $ABCD$ il quadrilatero circoscritto ad una circonferenza di centro $O$ e siano $H,K,L,M$ rispettivamente i punti di contatto dei lati $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ (Figura 7).

Ricordando le proprietà delle tangenti ad una circonferenza condotte da un suo punto esterno, si hanno le seguenti relazioni tra le lunghezze dei segmenti:

$$AH = AM, \;\; BH = BK, \;\; CL = CK, \;\; DL = DM.$$

Da queste uguaglianze sommando membro a membro si ottiene:

$$AH + BH + CL + DL = AM + BK + CK + DM,$$

cioè

$$AB + CD = BC + AD.$$

**Osservazione** Le proposizioni (a), (b) sono condizioni *necessarie* affinché un quadrilatero sia, rispettivamente inscritto oppure circoscritto ad una circonferenza. Queste due condizioni sono però anche *sufficienti*. Si invita il lettore interessato a darne una dimostrazione.

**4.1.4 a)** Sia $ABCDEF\dots$ un poligono convesso di $n$ lati (e quindi $n$ vertici) e $P$ un suo punto interno (Figura 8). Congiungendo $P$ successivamente con i vertici del poligono si ottengono tanti triangoli quanti sono i lati del poligono stesso, cioè $n$.

La somma degli angoli interni di tutti questi triangoli è dunque $n$ angoli piatti; sottraendo da questa somma due angoli piatti (cioè l'angolo giro costituito dalla somma di tutti gli angoli di tali triangoli aventi vertice $P$) si ottiene la somma degli angoli interni del poligono che risulta quindi uguale a $(n-2)$ angoli piatti.

**b)** Come è noto in un poligono convesso si chiama *angolo esterno* in un generico vertice $H$ l'angolo formato dalla semiretta di origine $H$, che contiene uno dei due lati del poligono

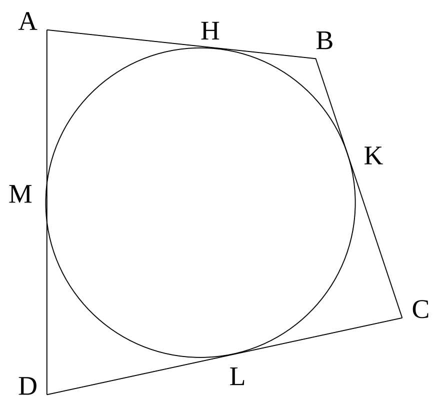


Figura 7.

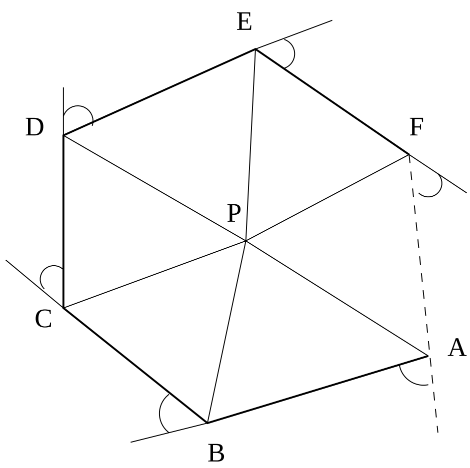


Figura 8.

uscenti da $H$, e la semiretta opposta a quella che contiene l'altro lato per $H$. Dunque in ogni vertice del poligono la somma dell'angolo interno e di un angolo esterno relativo a quel vertice è uguale ad un angolo piatto. Se il poligono ha $n$ vertici, la somma di tutti i suoi angoli interni e dei relativi angoli esterni è dunque $n$ angoli piatti. Poiché è noto (proposizione (a)) che la somma degli $n$ angoli interni è uguale a $(n-2)$ angoli piatti, se ne deduce che la somma degli $n$ angoli esterni è uguale a due angoli piatti.

**4.1.5**

**a)** $3x+4y-2=0$;

**b)** la distanza è $\frac{6}{5}$;

**c)** La retta tangente è unica poiché il punto assegnato appartiene alla circonferenza; la sua equazione è $2x-y=0$.

**4.1.6** Osserviamo che l'area $S$ e il volume $V$ di una sfera di raggio $r$ sono proporzionali rispettivamente a $r^2$ e $r^3$. Ne consegue $h=\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ e quindi $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{r_1^3}{r_2^3}=\sqrt{h^3}$.

**4.1.7** Indichiamo con $\mathsf{I}$ l'intersezione di $K$ con $\pi$. Se il piano $\pi$ è parallelo al piano $\gamma$, l'intersezione $\mathsf{I}$ è una circonferenza; se i piani $\pi$ e $\gamma$ si incontrano senza essere perpendicolari l'intersezione $\mathsf{I}$ è una ellisse; se $\pi$ è perpendicolare a $\gamma$ l'intersezione $\mathsf{I}$ potrà essere costituita da due rette, una retta oppure sarà priva di punti, secondo che la retta $r$, intersezione di $\pi$ con $\gamma$, è secante, tangente oppure esterna alla circonferenza $\mathsf{C}$.
In conclusione, i casi che si possono presentare sono: (a), (e), (f), (g), (l).

**4.1.8** Le possibili intersezioni di tre piani distinti dello spazio sono:

**a)** una retta $r$ comune ai tre piani;

**b)** un solo punto $P$, quando i piani si incontrano a due a due secondo tre rette distinte $a,b,c$ che passano per $P$;

**c)** l'insieme vuoto, quando i tre piani assumono una delle seguenti posizioni reciproche:

*i)* sono paralleli tra loro;

*ii)* si incontrano a due a due secondo tre rette distinte e parallele $a,b,c$ (i tre piani formano cioè in questo caso un prisma illimitato di sezione triangolare e spigoli $a,b,c$);

*iii)* due dei tre piani sono paralleli e questi, a loro volta, incontrano il terzo piano secondo due rette $a,b$ pure distinte e parallele.

**4.1.9 a)** Vi è esattamente un piano che contiene $r$ ed è parallelo a $s$ (cioè non ha punti in comune con $s$). Esso è il piano determinato da $r$ e da una qualunque retta $s'$ che è parallela a $s$ e che passa per un punto di $r$.

**b)** Se le rette sghembe $r$ e $s$ sono ortogonali esiste esattamente un piano che contiene $r$ ed è perpendicolare a $s$. Esso è il piano determinato dalla retta $r$ e dalla retta $t$ perpendicolare comune a $r$ e $s$. Se $r$ e $s$, sghembe, non sono tra loro ortogonali il piano richiesto non esiste.

* * *

**4.2.1** Risoluzione sintetica.
Se il punto $P$ è centro di $\mathcal{C}$, i punti della circonferenza hanno tutti la stessa distanza da $P$. Sia dunque $P$ diverso dal centro $C$ di $\mathcal{C}$. I punti cercati sono i punti $M,N$ intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta $PC$. Per dimostrarlo consideriamo ad esempio il più vicino a $P$ dei due punti $M,N$: sia esso $M$. Il cerchio $\mathcal{M}$, di centro $P$ e passante per $M$, è tangente a $\mathcal{C}$ in $M$, essendo la retta passante per $M$ e perpendicolare a $PC$ tangente comune a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M}$. Dunque $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M}$ non hanno punti in comune oltre a $M$, e quindi $\mathcal{M}$ è tutto esterno o tutto interno a $\mathcal{C}$, secondo che lo è il punto $P$. Allora la distanza da $P$ di un qualsiasi punto $X$ di $\mathcal{C}$, è maggiore o uguale a quella di $M$ da $P$. Ragionamento analogo per il punto $N$.
Risoluzione analitica.
Per procedere alla risoluzione analitica è necessario in primo luogo scegliere in modo opportuno il sistema di riferimento. Tale scelta va fatta in modo da poter esprimere i dati del problema nella forma che renda i calcoli e la lettura dei risultati più semplice che sia possibile, avendo però cura di non ledere la generalità delle ipotesi.

Supponiamo ora che il punto $P$ sia diverso dal centro $C$ della circonferenza. Possiamo fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) avente l'origine degli assi nel centro $C$ e l'asse delle ascisse coincidente con la retta $CP$ orientato in modo che $P$ abbia ascissa positiva. Assumiamo la lunghezza del raggio di $\mathcal{C}$ come unità di misura. In tal caso la circonferenza $\mathcal{C}$ avrà equazione $x^2+y^2=1$ e il punto $P$ avrà coordinate $(t,0)$, con $t>0$. Se $X=(a,b)$ è un generico punto di $\mathcal{C}$, la distanza $d$ tra $P$ ed $X$ sarà data da $d^2=(a-t)^2+b^2$. Ricordando che $a^2+b^2=1$ si ha $d^2=t^2-2at+1$ e quindi, se $t\neq 0$, $d$ è minima o massima al variare di $a$ secondo che è minimo o massimo il valore $(-2at)$. Poiché il campo di variabilità di $a$ è $-1\leq a\leq 1$, il minimo valore di $d$ si avrà per $a=1$, il massimo per $a=-1$. Il punto di $\mathcal{C}$ più vicino e quello più lontano da $P$ saranno dunque, rispettivamente, $(1,0)$ e $(-1,0)$. Si conferma in questo modo lo stesso risultato già trovato per via sintetica.
Se $P$ coincide con $C$, tutti i punti della circonferenza hanno la stessa distanza da $P$.

**4.2.2** La proposizione è falsa perché esiste almeno un contro-esempio; infatti in un triangolo rettangolo isoscele la bisettrice dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa. La proposizione è invece vera se e solo se uno dei cateti ha lunghezza doppia dell'altro.

**4.2.3** Entrambe le proposizioni possono essere assunte come definizione di asse di un segmento e quindi l'altra proposizione può costituire l'enunciato di un teorema. La scelta dipende essenzialmente dalle nozioni che i diversi libri di testo vogliono considerare note e dagli strumenti teorici che sono a disposizione per svolgere la dimostrazione.
Ad esempio, se nello svolgimento della teoria viene introdotta preliminarmente la nozione di riflessione (simmetria) rispetto ad una retta (ed è quindi nota l'esistenza e unicità della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data) la più naturale definizione di asse di un segmento è formulata dall'enunciato (a). In questo caso la proposizione (b) esprime una importante proprietà delle riflessioni. Occorre a questo fine distinguere due eventualità. Se la riflessione è stata *definita* come una particolare isometria, allora la validità della proposizione (b) è immediata. Se invece la riflessione è stata semplicemente definita come una particolare biiezione, allora la proposizione (b) va dimostrata nel contesto più ampio in cui si dimostra che le riflessioni sono isometrie.
Al contrario, se nel libro di testo è stata introdotta preliminarmente la nozione di distanza tra due punti del piano (oppure, il che è lo stesso, la nozione di congruenza tra segmenti del piano) è naturale allora assumere come definizione di asse di un segmento l'enunciato (b). Occorre poi introdurre la definizione di punto medio di un segmento, di rette perpendicolari e il teorema di esistenza e unicità della retta, passante per un punto assegnato e perpendicolare ad una retta data. Con questi strumenti, e sulla base dei criteri di congruenza dei triangoli, è possibile dimostrare che il luogo definito in (b) è una retta e che tale retta possiede le proprietà enunciate in (a).

**4.2.4** (Risoluzione analitica). Si assumano le due rette perpendicolari come assi di un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico). Il luogo cercato è costituito dai punti $P=(x,y)$ le cui coordinate soddisfano la disequazione $|x|+|y|\leq 1$.
Tale luogo consiste nei punti interni e nel contorno del quadrato di vertici $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$.

**4.2.5** Un punto $P$ del piano è punto interno al triangolo se si trova, rispetto a ciascuna retta che contiene un lato, nello stesso semipiano che contiene il vertice restante. Per riconoscere questo fatto basta scrivere l'equazione di ognuno dei lati, poniamo $ax+by+c=0$, e poi controllare se, sostituendo al posto delle coordinate correnti le coordinate del punto $P$ e, rispettivamente, del terzo vertice, il primo membro della equazione $(ax+by+c)$ assume, in entrambi i casi, lo stesso segno. Il punto $P$ sarà invece sul bordo del triangolo se coincide con uno dei vertici oppure risulta interno, con riferimento a due delle tre rette che contengono i lati, ed appartiene invece alla terza retta.
Nel caso particolare proposto le equazioni dei lati del triangolo sono: retta $AB$ $4x-5y+11=0$, retta $AC$ $4x+4y-16=0$, retta $BC$ $8x-y-41=0$. Indicati ora i primi membri di queste equazioni rispettivamente con le espressioni

$$c(x,y)=4x-5y+11,\ \ b(x,y)=4x+4y-16,\ \ a(x,y)=8x-y-41,$$

si ottiene:
$c(C) = c(5,-1) = 20+5+11 > 0$, $c(P) = c(3,3) = 12-15+11 > 0$,
$b(B) = b(6,7) = 24+28-16 > 0$, $b(P) = b(3,3) = 12+12-16 > 0$,
$a(A) = a(1,3) = 8-3-41 < 0$, $a(P) = a(3,3) = 24-3-41 < 0$.
Il punto $P = (3,3)$ risulta quindi interno al triangolo $ABC$.

**4.2.6** La proposizione "la curva $\gamma$ (oppure il "luogo geometrico $\gamma$") è rappresentata dalla equazione $f(x,y) = 0$" significa che $\gamma$ è l'insieme di tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $f(x,y) = 0$. In questo senso può anche accadere che $\gamma$ non contenga punti, oppure che sia composta da un solo punto.
Nella famiglia $\mathcal{F}$ si trova una retta (per $a = 0$) e un punto (il punto $(0,0)$ per $a = -1$). Per ogni altro valore di $a$ i luoghi geometrici appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}$ sono le circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 + (1+\frac{1}{a})x + (1+\frac{1}{a})y = 0.$$

Al variare di $a$ ($a \neq 0$, $a \neq -1$) esse hanno centro nel punto $(-\frac{a+1}{2a}, -\frac{a+1}{2a})$ e raggio di lunghezza $r = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a+1}{a}\right|$. Il luogo dei centri di $\mathcal{F}$ è dunque contenuto nella retta di equazione $y = x$. Da tale retta va escluso il punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ che non è centro di alcuna circonferenza della famiglia $\mathcal{F}$ (con abuso di linguaggio si potrebbe anche dire che la circonferenza di $\mathcal{F}$ avente centro nel punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ corrisponde al valore "infinito" del parametro $a$).
Per ogni valore reale positivo $r$, le circonferenze di $\mathcal{F}$ che hanno raggio di lunghezza $r$, sono dunque quelle di centro $(r\frac{\sqrt{2}}{2}, r\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-r\frac{\sqrt{2}}{2}, -r\frac{\sqrt{2}}{2})$. Per ogni valore di $r \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ si trovano quindi in $\mathcal{F}$ due circonferenze distinte; per $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha invece l'unica circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

**4.2.7** Per il significato della espressione "equazione di un luogo di punti" si veda quanto già detto nella risposta al Quesito 4.2.6.
Le equazioni proposte rappresentano, rispettivamente, i seguenti luoghi:

**a)** una circonferenza (centro $(0,0)$, raggio 1);

**b)** un punto ($(0,0)$);

**c)** nessun punto;

**d)** una retta ($x+y=0$);

**e)** un punto ($(0,0)$);

**f)** due rette ($y = x$, $y = -x$);

**g)** un punto ($(-1,-1)$);

**h)** due punti $((1,0), (-1,0))$.

**4.2.8**

**a)** falsa; vedi (4.2.7,b);

**b)** falsa; vedi (4.2.7,d);

**c)** falsa; $x^2 + 2y^2 = 1$ non è una circonferenza;

**d)** falsa; vedi (4.2.7,c), oppure (4.2.7,g).

Dunque nessuna delle proposizioni proposte è vera.