Soluzioni

1. Risposta esatta: E.
Possiamo fare i conti a mente. Abbiamo infatti: $225 \cdot 10 = 2250$ e $2250/2 = 1125$. Pertanto $225 \cdot 15 = 2250 + 1125 = 3375$. D'altronde $3437 - 3375 = 62$. Il quoziente è quindi 15 con resto 62.
Se fosse stato permesso l'uso della calcolatrice, si sarebbe potuto arrivare allo stesso risultato usando il seguente algoritmo. Dividendo 3375 per 225, si ottiene $15, \ldots$. Inoltre $225 \cdot 15 = 3375$. Infine $3437 - 3375 = 62$. Ma si sarebbe forse impiegato più tempo usando una calcolatrice che facendo i calcoli a mente.
Si sarebbe potuto evitare di fare i calcoli andando per esclusione.
Le risposte A,B e C si escludono perché il resto non può avere come ultima cifra 3 poiché un multiplo di 225 ha come ultima cifra o 0 o 5. Rimane la risposta D: il prodotto di 225 per 16 ha come ultima cifra 0 ($6 \times 5 = 30$); allora il resto deve avere come ultima cifra 7, e quindi non può essere 62.
Commento. Le divisioni con resto sono state inserite nel tema 1. La domanda proposta è analoga al primo quesito di livello base del tema 1. Il non aver dato la risposta esatta fa pertanto scattare un campanello d'allarme. Non si ha ancora una padronanza dell'argomento? La ristrettezza di tempo ha causato un errore nei calcoli? In ambedue i casi si consiglia di correre velocemente ai ripari.

2. Risposta esatta: C.
Fattorizziamo ambedue i numeri. Abbiamo $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$ e $444 = 2^2 \cdot 3 \cdot 37$. Il massimo comun divisore di 228 e 444 è quindi $2^2 \cdot 3 = 12$.
La fattorizzazione dei due numeri richiede tempo. Avremmo risparmiato tempo determinando i fattori del numero che sembra più facilmente fattorizzabile e controllando quali tra questi suoi fattori sono al tempo stesso fattori del secondo numero. Si nota infatti che si ha $444 = 4 \cdot 111 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$. In alternativa si può usare l'algoritmo di Euclide. Abbiamo $444 = 228 + 216$, inoltre $228 = 216 + 12$. Pertanto 12 è il massimo comun divisore di 444 e 228.
Commento. Notiamo anzitutto che sarebbe gravissimo dare come risposta A o B. I due numeri assegnati infatti sono entrambi divisibili per 2 e per 3. Dunque il loro massimo comun divisore è 6 o un suo multiplo.
La domanda proposta è analoga al quesito di livello base 1.1.8. Vale anche in questo caso il commento fatto per la prima domanda.

3. Risposta esatta: E.
I multipli di 4 e di 6 sono dati dai multipli di 12, minimo comune multiplo di 4 e 6. Quelli minori di 30 sono 12 e 24.
Commento. Nel tema 1 è inserito l'argomento massimo comun divisore e minimo comune multiplo. "Sapere" un concetto non significa solamente saperne dare la definizione. Significa

anche sapere usare tale concetto. Chi ha dato la risposta A ha considerato l'insieme dei multipli di 4 e l'insieme dei multipli di 6. L'insieme dei multipli sia di 4 che di 6 è dato dall'intersezione dei due insiemi, non dall'unione.
Correre velocemente ai ripari se non si è data la risposta esatta.

4. Risposta esatta: E.
Se il prodotto di 7 numeri è negativo allora dalla regola dei segni segue che un numero dispari di essi sono negativi.
Commento. La risposta A è errata. Se infatti tutti i sette numeri sono negativi, allora il loro prodotto è negativo. Ma non è vero il viceversa. Discorso analogo vale per le risposte B,C,D. Molto probabilmente coloro che hanno dato la risposta sbagliata hanno invertito ipotesi con tesi (o, detto in altro modo, condizione necessaria con condizione sufficiente).

5. Risposta esatta: A.
L'opposto di un numero negativo è positivo, sommando ad esso un numero positivo si ottiene un numero positivo.
Commento. Una probabile causa di errore è il pensare che $-a$, poiché vi è il segno "meno", sia negativo. Errore imperdonabile. Non è assolutamente ammesso rispondere in modo errato a questa domanda.

6. Risposta esatta: D.
Da $\log_2(\log_3 x) = 3$ segue $\log_3 x = 2^3 = 8$ e quindi $x = 3^8$.
Commento. Per poter rispondere a questa domanda bisogna aver capito in profondità la definizione di logaritmo. Per capire in profondità una definizione non è sufficiente impararla a memoria. Chi non ha saputo dare la risposta esatta faccia ancora un po' di calcoli con i logaritmi.

7. Risposta esatta: D.
La risposta A è sbagliata. Infatti $0{,}3^2 = 0{,}09$. Errore imperdonabile aver scelto la risposta A. Anche la risposta B è sbagliata. Infatti $0{,}81^2 = 0{,}6561 < 0{,}9$. Proprio quest'ultima osservazione ci dice che si ha $0{,}81 < \sqrt{0{,}9}$. Abbiamo a $0{,}9^2 = 0{,}81 < 0{,}9$. Pertanto, poiché ovviamente $\sqrt{0{,}9} < 1$, la risposta esatta è la D.
Commento. Per rispondere a questa domanda è necessario conoscere la definizione di radice quadrata e possedere un minimo di inventiva. Chi ha dato la risposta sbagliata deve al più presto porre rimedio. In particolare deve rendersi conto che occorre capire meglio le definizioni (che magari già conosce) e capire anche il significato dei calcoli che esegue.

8. Risposta esatta: B.
Abbiamo $98075 = 9{,}8\ldots \cdot 10^4$ e $12783456 = 1{,}2\ldots \cdot 10^7$.
Poiché $1 < \frac{9{,}8\ldots}{1{,}2\ldots} < 10$, abbiamo $10^{-3} < K < 10^{-2}$.
Commento. Domanda non facile. Questo esercizio ha lo scopo di verificare la padronanza con le regole delle potenze. Sono regole importanti che devono essere ben interiorizzate in modo tale da poterle utilizzare nei più diversi contesti.

9. Risposta esatta: B.
Abbiamo 1 cm $= 10^{-2}$ m. Pertanto 1 cm$^3 = 10^{-6}$ m^3. Segue:

$700 \text{ cm}^3 = 7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.
Commento. Questo esercizio ha lo scopo di verificare la padronanza con i fattori di conversione tra unità di misura e con le regole delle potenze.

10. Risposta esatta: B.
Si ha $Q = P + 0{,}017P = 1{,}017P$.
Commento. Errori sulla rappresentazione dei numeri e sul calcolo di percentuali non sono ammessi.

11. Risposta esatta: B.
Poiché $0 < \sqrt{a}$, dividendo per $\sqrt{a}$ ambo i membri della disequazione $\sqrt{a} < a$ otteniamo $1 < \sqrt{a}$. Segue $a > 1$.
Commento. Errore grave aver risposto A. Basti pensare $a = 1$. Si ha $\sqrt{a} = 1 = a$. Oppure si pensi $a = 1/4$. In questo caso si ha $\sqrt{a} = 1/2 > 1/4 = a$.
Chi non è stato in grado di dare la risposta esatta deve al piú presto riguardarsi la definizione di radice quadrata con le relative implicazioni e le disequazioni. In effetti lo avrebbe dovuto già fare: sono argomenti inseriti alla fine del tema 2.

12. Risposta esatta: E.
Non dovrebbero esserci dubbi. La doppia disequazione è verificata per $-3 < x < -2$ e per $2 < x < 3$. L'affermazione precedente può essere equivocata perché l'uso della "e" nel linguaggio corrente è ambiguo. <u>Non</u> intendiamo infatti che le due condizioni siano verificate entrambe contemporaneamente. Per evitare ambiguità sarebbe preferibile scrivere la risposta nella forma $\{x : -3 < x < -2\} \cup \{x : 2 < x < 3\}$.
Commento. Chi ha dato una qualsiasi altra risposta deve riflettere con molta attenzione sul significato e sull'uso del formalismo relativo alle disequazioni. Chi poi ha dato la risposta A ha dato una risposta completamente priva di senso. Si può anche sbagliare ma non si può assolutamente scrivere qualcosa che non ha senso. Le risposte B,C e D hanno senso ma sono sbagliate. Il numero $x = -2{,}5$ non verifica le condizioni $2 < x < 3$ eppure si ha $4 < x^2 < 5$. Il numero $-2{,}5$ è quindi un controesempio alla risposta B. Il numero 0 è poi un controesempio sia alla risposta C che alla risposta D.

13. Risposta esatta: E.
Poiché $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ la disequazione è verificata ogni qual volta tra i fattori $x - 1$, $x + 1$ e $1/x$ ve ne sono o uno o tre positivi. Pertanto la disequazione è verificata ogni qual volta si ha $-1 < x < 0$ oppure ogni qual volta si ha $x > 1$.
Commento. Si tratta di una semplice disequazione con espressioni fratte. L'argomento e' inserito nel Tema 2. Chi ha dato una risposta errata deve svolgere molti esercizi di questo tipo.

14. Risposta esatta: C.
Il costo di una telefonata di n scatti è uguale a $127 \cdot n$ Lire. Poiché 10 minuti corrispondono a 3 scatti in tariffa ordinaria e a 2 scatti in tariffa serale, il costo della telefonata è uguale a 381 Lire in tariffa ordinaria e 254 Lire in tariffa serale.
Commento. Poiché 10 è il doppio di 5, in un primo momento viene in mente di raddoppiare

i costi della telefonata di 5 minuti. Basta però un minimo di attenzione per capire che i costi delle telefonate non sono proporzionali alle loro durate.

15. Risposta esatta: A.

Il costo del noleggio è uguale a $50.000 + 20.000 \cdot g + 100 \cdot k$ Lire, dove g è il numero di giorni e k è il numero di chilometri. Pertanto il cliente paga 145.000 Lire.

Commento. Domanda facile. Basta porre un po' d'attenzione.

16. Risposta esatta: C.

Nel sacchetto vi sono all'inizio 20 biglie di cui 10 nere. Il bambino ha quindi probabilità $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ di estrarre una prima biglia nera. Una volta estratta la biglia nera, nel sacchetto rimangono 19 biglie di cui solo 9 nere. La probabilità di estrarre ora una biglia nera è quindi uguale a $\dfrac{9}{19}$. Pertanto la probabilità che il bambino estragga due biglie nere è uguale a $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{19} = \dfrac{9}{38}$.

Commento. Anche lo studente al quale non sono stati insegnati i primi rudimenti di probabilità dovrebbe essere in grado di rispondere correttamente a questa domanda anche se con una certa difficoltà. Lo studente che conosce già i rudimenti di probabilità non dovrebbe invece incontrare alcuna difficoltà.

Ad ogni modo la risposta B sarebbe stata gravemente errata: infatti $\dfrac{56}{38} > 1$.

17. Risposta esatta: B.

La risposta A, come la risposta C, è errata. La presenza di anche un solo scolaro non diligente implica che non tutti gli scolari sono diligenti.

Commento. Domanda molto facile.

18. Risposta esatta: C.

Sappiamo che si ha $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ per ogni valore di x.

L'equazione $\sin 2x = 2 \sin x$ è equivalente all'equazione $2 \sin x(\cos x - 1) = 0$.

Per la regola di annullamento del prodotto le soluzioni sono date dalle soluzioni dell'equazione $\sin x = 0$ (che sono $x = k\pi$ con k intero qualsiasi) e dalle soluzioni dell'equazione $\cos x = 1$ (che sono $x = 2k\pi$ con k intero qualsiasi).

Commento. Se non si ha una buona padronanza della trigonometria è facile sbagliare. Abbiamo inserito l'argomento "trigonometria" nel Tema 5. Anche chi non ha studiato la trigonometria a scuola deve assolutamente studiarsela per conto proprio. Nei corsi universitari la trigonometria viene utilizzata senza spiegarla: non vi saranno concessi errori su esercizi di questo tipo.

19. Risposta esatta: B.

Sappiamo che in un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale alla misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo ad esso opposto.

La misura in centimetri dell'altezza cercata è quindi uguale a $40 \cdot \sin 30^\circ = 40/2$.

Commento. Semplice esercizio di trigonometria. Chi ha dato una risposta errata non ha padronanza dei rudimenti di trigonometria. Deve porre immediatamente rimedio.

Notiamo che avremmo potuto rispondere alla domanda anche senza fare uso della trigonometria con il seguente ragionamento. Poiché gli angoli in B e C sono di 30°, l'angolo in A è quindi di 120°. Sia A' il punto simmetrico di A rispetto alla retta passante per B e C. Il triangolo $AA'B$ ha gli angoli di 60° e quindi è equilatero. Perciò l'altezza in A del triangolo ABC è metà di AA', quindi di AB, cioè 20 cm.

20. Risposta esatta: D.
Siano A, B, C i vertici di un triangolo e D, E, F i vertici del secondo triangolo. Scegliamo l'immagine del vertice A. Abbiamo tre possibilità: una per ogni vertice del triangolo DEF. Dobbiamo ora decidere l'immagine del vertice B. Poiché i due triangoli equilateri sono congruenti, abbiamo due possibilità: una per ognuno dei due vertici che non sono immagine del vertice A. A questo punto l'immagine del vertice C è fissata. Abbiamo quindi 6 isometrie.

Ci si potrebbe chiedere di che tipo siano le 6 isometrie. Si può innanzitutto studiare il caso in cui i due triangoli coincidano. In questo caso abbiamo l'identità, le rotazioni intorno al centro (che coincide con l'incentro, il circocentro, il baricentro e l'ortocentro) di 120° e 240° e le simmetrie rispetto ai tre assi del triangolo. In totale dunque, sei isometrie.

Consideriamo ora il caso in cui i due triangoli non coincidano. Allora è noto che esiste esattamente una isometria che porta un triangolo assegnato in un altro ad esso congruente. Le sei isometrie cercate sono date dalle sei isometrie che portano il triangolo ABC in se stesso, composte con quell'unica isometria che porta il triangolo ABC nel triangolo DEF.

Commento. Domanda non facile. Provare ora a rispondere alla stessa domanda sostituendo i due triangoli congruenti equilateri con due triangoli congruenti isosceli ma non equilateri. Considerare infine il caso di due triangoli congruenti scaleni.

21. Risposta esatta: C.
Le rette parallele alla retta r hanno equazione $y = x + a$. Per calcolare il valore del parametro a scegliamo il punto $O = (0,0)$ della retta r, e imponiamo che la sua distanza dalla retta cercata sia uguale a 1. Otteniamo $|a|/\sqrt{2}$=1. Pertanto le rette cercate hanno equazioni: $y = x + \sqrt{2}$ e $y = x - \sqrt{2}$.
Commento. Domanda non difficile di geometria analitica. Notiamo che si può ottenere la risposta facendo la figura e notando che la diagonale di un quadrato di lato 1 è uguale a $\sqrt{2}$.

22. Risposta esatta: C.
Notiamo che i punti P hanno l'ascissa uguale all'ordinata. Inoltre l'ascissa (e quindi l'ordinata) sono maggiori o uguali a 1. I punti P sono quindi punti della semiretta appartenente alla retta $y = x$, avente origine nel punto $(1,1)$ e contenente per esempio il punto $(2,2)$. Viceversa, ogni punto di tale semiretta è punto del tipo $(1+t^2, 1+t^2)$. Infatti un punto generico di tale semiretta ha coordinate (a,a) con $a \geq 1$. Si ha quindi $a = 1+t^2$ ponendo $t = \sqrt{a-1}$.
Commento. Molte volte l'apparenza inganna: i termini $1+t^2$ possono trarre in inganno. Chi ha dato la risposta A si può consolare pensando che questa è la risposta di solito scelta dalla maggioranza degli studenti universitari del primo anno.

23. Risposta esatta: C.
Si ha $x^2-2y^2=(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)$. Dalla legge di annullamento del prodotto segue che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è dato dall'insieme dei punti della retta $x+\sqrt{2}y=0$ e dall'insieme dei punti della retta $x-\sqrt{2}y=0$. Si tratta di due rette che si incontrano nel punto $(0,0)$.
Commento. La domanda non è facile per coloro che, e sono la maggioranza, non sono abituati a maneggiare equazioni in più variabili. Un po' di attenzione permette però di risolvere problemi mai affrontati in precedenza. Nei corsi universitari vengono spesso assegnati problemi che, sebbene non trattati in precedenza, possono essere risolti con un po' di attenzione e inventiva.

24. Risposta esatta: B.
Si consideri una diagonale di una faccia del cubo. Essa misura $\sqrt{2}$. Si applichi quindi il teorema di Pitagora ad un triangolo rettangolo avente per cateti una diagonale di una faccia del cubo e un lato del cubo e per ipotenusa una diagonale del cubo.
Commento. Sebbene la geometria dello spazio sia spesso trascurata nelle scuole secondarie superiori, questa domanda non è molto difficile.

25. Risposta esatta: E.
Commento. Tra gli argomenti inseriti nel Tema 4 (geometria) vi è tra l'altro la perpendicolarità tra due piani. Consigliamo quindi di prendere un qualsiasi testo e andare a cercare la definizione di perpendicolarità tra due piani. Chi non ha saputo dare la risposta esatta deve rivedere con cura questo e gli altri argomenti di geometria dello spazio indicati nel Tema 4. Quasi tutti i corsi universitari considerano noti questi argomenti.

26. Risposta esatta: D.
Il luogo dei punti equidistanti da due punti distinti A e B è dato dal piano passante per il punto medio di A e B perpendicolare alla retta passante per A e B.
Commento. Per rispondere a questa domanda è necessario avere una discreta visione dello spazio.

27. Risposta esatta: C.
Affinché i triangoli ABC siano rettangoli in A, i punti C devono appartenere al piano π passante per A perpendicolare alla retta AB. Affinchè l'area del triangolo sia uguale a 1 cm^2 i punti devono appartenere alla circonferenza contenuta in π di centro A e raggio uguale a 2/5 cm.
Commento. Domanda assolutamente non facile. Per rispondere ad essa è necessario avere una visione dello spazio molto buona.

28. Risposta esatta: A.
Abbiamo:
$$3+6+9+\ldots+297+300=3(1+2+3+\ldots+99+100)=3\cdot\frac{1}{2}100\cdot 101=15150.$$
Commento. La domanda non è difficile se sono stati analizzati con cura i quesiti e le relative soluzioni assegnati nel secondo capitolo. Avete preso alla leggera il secondo capitolo? Male. Riguardatelo con cura e poi provate a rifare tutto il test.

29. Risposta esatta: C.

Abbiamo $a_1 = 10,\ a_2 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{10},\ a_3 = \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{1}{\frac{1}{10}} = 10, \ldots$.

I termini di indice pari sono uguali a $\dfrac{1}{10}$ e quelli di indice dispari sono uguali a 10.

Commento. Domanda non molto difficile pur di aver ben compreso il significato della formula ricorsiva.

30. Risposta esatta: B.

I due grafici sono simmetrici rispetto all'asse delle x.

Commento. La domanda non è difficile. E' simile al Quesito 5.2.10.