PAC - APRILE 2004

E 6. Fluttuazioni nel lancio di una moneta.

Una moneta (equa) viene lanciata N volte (per esempio $N = 10^4$). Il giocatore A ottiene un punto ogni volta che il lancio dà "testa". Il giocatore B ottiene un punto ogni volta che il lancio dà "croce".

1. Si calcoli la frazione di tempo v in cui il giocatore A è in vantaggio sul giocatore B. Contrariamente a una concezione ingenua delle fluttuazioni si osserverá che i valori tipici di v non si avvicinano (nemmeno per N molto grande) al valor medio $\frac{1}{2}$.

2. Si ripeta l'esperimanto M volte e si indichino con $v_1, v_2, \ldots, v_M$ le frequenze corrispondenti. Si ponga, al solito $S_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} v_i$. Visualizzando l'andamento di S_M al crescere di M si osserverá che $S_M \sim \frac{1}{2}$, il che restituisce, in parte, l'intuizione perduta.

3. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_M$ come sopra e si costruisca un istogramma delle frequenze come segue. Suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ in Δ (per es. $\Delta = 100$) parti uguali e calcoliamo la frazione di esperimenti che fornisce un valore della frequenza nei vari intervalli:

$$f(k) = \frac{\Delta}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbb{I}(v_i \in [\frac{k}{\Delta}, \frac{k+1}{\Delta})) \,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \Delta - 1$$

Fissato M (per es. $M = 10^5$) si grafichi f al variare di k fra 0 e $\Delta - 1$. Si osservi la concentrazione intorno agli estremi.

4. Si osservi che l'istogramma approssima (sempre meglio al crescere del parametro Δ) la densità di probabilità

$$\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \,, \qquad x \in [0,1] \,.$$

Questa è nota come *legge dell'arcoseno.*

Suggerimenti

Siano $X_1, \ldots, X_N$ bernoulliane indipendenti di parametro $p = \frac{1}{2}$ (i risultati degli N lanci di una moneta). Ponendo $Y_i = 2X_i - 1$ si ha $+1$ se vince A e -1 se vince B. Al tempo $k = 1, 2, \ldots, N$ il bilancio tra i due giocatori è dato da

$$Z_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i = \#(\text{vincite } A) - \#(\text{vincite } B)$$

e diremo che A è in vantaggio se $Z_k > 0$. Quindi v si puo' calcolare mediante la formula

$$v = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}(Z_k > 0) + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}(Z_k = 0) \,.$$

Qui il secondo termine è stato aggiunto per motivi di simmetria (altrimenti non è esatto dire che $S_M \to \frac{1}{2}$). Ripetendo M volte l'esperimento si ottengono i valori di S_M e dell'istogramma $f(k)$. Per il calcolo di $f(k)$ si deve fare attenzione a non escludere gli estremi $v = 0, v = 1$. L'espressione data nel testo per esempio include $v = 0$ ma esclude $v = 1$. Si consiglia quindi di correggerla aggiungendo il valore $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbb{I}(v_i = 1)$ alla variabile $f(\Delta - 1)$. Per una discussione dettagliata della legge dell'arcoseno rimandiamo al libro di W. Feller.

`caputo@mat.uniroma3.it`.