

PAC - 10 MAGGIO 2007

E 9. Metodo della trasformazione per v.a. continue.

1. *Esponenziale*: Simulare la v.a. continua X con densità

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \in [0, \infty),$$

nei diversi casi $\lambda = 0.1, 1, 10$. Graficare media e varianza empirica al variare del numero n di prove e confrontare con i valori teorici

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. *Cauchy*: Si ripeta l'esperimento proposto al punto 1 per la v.a. X con densità

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

La v.a. X non ha valor medio, ossia $\mathbb{E}|X| = +\infty$. In particolare, si osserverà una minore stabilità delle misure.

E 10. Simulazione di v.a. di Poisson.

Simulare variabili aleatorie di Poisson X^λ di parametro $\lambda > 0$, utilizzando la rappresentazione in termini di v.a. di legge esponenziale. Calcolare media empirica S_n e varianza empirica V_n su un numero di prove n sufficientemente grande, al variare di λ tra 0.1 e 1. Graficare i valori ottenuti e confrontare con i valori teorici $\mathbb{E}[X^\lambda] = \text{Var}[X^\lambda] = \lambda$.

Suggerimenti

E 9. Il metodo della trasformazione può essere brevemente illustrato come segue. Sia X una v.a. continua con densità $f(t)$, $t \in [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. La funzione di distribuzione associata è $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{x_1}^x f(t)dt$. Pertanto si ha

$$\mathbb{P}[X \in [a, b]] = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \quad x_1 \leq a \leq b \leq x_2. \quad (0.1)$$

Se Y è v.a. uniforme in $[0, 1]$ allora la (0.1) equivale a $\mathbb{P}[Y \in [F(a), F(b)]]$. In particolare, se $F : [x_1, x_2] \rightarrow [0, 1]$ è strettamente crescente allora abbiamo $\{X \in [a, b]\} \iff \{F(X) \in [F(a), F(b)]\}$ e la (0.1) stabilisce che la v.a. $Y = F(X)$ è distribuita uniformemente in $[0, 1]$, qualunque sia la distribuzione di X . Invertendo F otteniamo che X è distribuita come $F^{-1}(Y)$. Quindi se si dispone di un'espressione esplicita per F^{-1} il metodo della trasformazione permette di simulare X calcolando $F^{-1}(Y)$ dove Y è uniforme in $[0, 1]$. Nei casi proposti:

- se $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Quindi

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - y), \quad y \in (0, 1).$$

- se $f(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $t \in \mathbb{R}$ si ha $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$. Invertendo:

$$F^{-1}(y) = \text{tg} \left[\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right], \quad y \in (0, 1).$$

E 10. Ricordiamo che se X_1, X_2, \dots sono realizzazioni indipendenti di v.a. esponenziali di parametro 1, allora la rappresentazione

$$\begin{aligned} X^\lambda &= \inf \{k \geq 0 : X_1 + \dots + X_{k+1} > \lambda\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{I}(X_1 + \dots + X_\ell \leq \lambda) \end{aligned} \quad (0.2)$$

fornisce una v.a. di Poisson di parametro λ :

$$\mathbb{P}(X^\lambda = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Per la simulazione delle esponenziali X_i si utilizzi la rappresentazione $X = -\log Y$, con Y uniforme in $(0, 1)$ (si veda **E9**). Il programma può essere quindi realizzato tramite un semplice ciclo `do ... while` da arrestare non appena si realizza l'evento $X_1 + \dots + X_\ell > \lambda$.