Appello A – 28/1/2011

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!*
• **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.
• **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

Es 1 [Pt. 25] (i) Dare la definizione di insieme induttivo, di $\mathbb{N}$ e dimostrare che $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto alla somma.
(ii) Dare la definizione di $a_n \to -\infty$. Dimostrare (usando solo la definizione di limite) che se $a_n \to -\infty$ e $b_n \geq 1$ allora $a_n b_n \to -\infty$.
(iii) Dare la definizione di serie convergente e dimostrare (senza usare il criterio di condensazione di Cauchy) che $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente.
(iv) Dimostrare che una successione convergente è di Cauchy.
(v) Dimostrare (usando solo la definizione di funzione continua e di limite) che se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ e $x_n \to x_0$ (con $x_n \in A$) allora $f(x_n) \to f(x_0)$.

Es 2 [Pt. 24] Calcolare i seguenti limiti

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 3-} \frac{x^3 - 27}{|x-3|} \ , \qquad \text{(ii)} \quad \lim \frac{\log\left(\cosh \frac{1}{n}\right)}{\operatorname{sen} \frac{2}{n^2}} \ , \qquad \text{(iii)} \quad \lim \frac{1}{n^4}\left(1 + \frac{1}{n^{1/4}}\right)^n \ .$$

Es 3 [Pt. 24] Studiare la convergenza delle seguenti serie (al variare eventualmente del parametro x)

$$\text{(i)} \quad \sum \frac{x^n + \sqrt{n}}{2^n + n^2} \ , \qquad \text{(ii)} \quad \sum \frac{\sqrt{n} + \log n}{n \log n!} \ , \qquad \text{(iii)} \quad \sum \frac{n^n}{2^{n^2}} \ .$$

Es 4 [Pt 12] Trovare l'interno e la frontiera dei seguenti insiemi: $A = \{1, 3\}$, $B = [1, 3]$, $C = [1, 2] \cup \{3\}$, $D = \{3 - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Es 5 [Pt. 15] Calcolare il liminf e limsup di a_n con

$$a_n = \begin{cases} \operatorname{sen}(\log n^4) & \text{se } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \ , \\ -n^2 + n & \text{se } n \text{ è primo} \ , \\ 2\,(-1)^n & \text{altrimenti} \ . \end{cases}$$