Appello C – 22/6/2011

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!*
• **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.
• **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

Es 1 [Pt. 25] (i) Enunciare l'assioma dell'estremo superiore e dimostrare che da esso segue l'esistenza dell'estremo inferiore.
(ii) Enunciare e dimostrare la formula sulle somma delle serie geometriche.
(iii) Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0+} f(x)$. Dare un esempio (con dimostrazione) di f con $\lim_{x\to 1-} f \neq \lim_{x\to 1+} f$.
(iv) Dare le definizioni, ed illustrarle su di un esempio, di derivato, chiusura, interno e frontiera di un insieme.
(v) Dare la definizione di sottosuccessione e dimostrare che se $a_n \to \infty$ ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite.

Es 2 [Pt. 24] Calcolare i seguenti limiti

$$\text{(i)}\quad \lim \Big(1+\frac{1}{n+n^2}\Big)^n\ , \qquad \text{(ii)}\quad \lim \frac{n^2 \operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\log n!}\ , \qquad \text{(iii)}\quad \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\log x} - \sqrt{x}\ .$$

Es 3 [Pt. 24] Studiare la convergenza delle seguenti serie (al variare di x ove appaia)

$$\text{(i)}\quad \sum \frac{\sqrt{n}+nx^n}{n^2}\ , \qquad \text{(ii)}\quad \sum \tanh\Big(1-\cos\frac{1}{n}\Big)\ , \qquad \text{(iii)}\quad \sum \frac{[e^n]}{(\log n)^n}\ .$$

Es 4 [Pt 12] Sia $A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \Big(\mathbb{Q}\cap[0,1)\Big)$.
(i) Trovare $a_n \in A$ tale che $\limsup a_n = 1$ e $\liminf a_n = -\infty$.
(ii) Trovare $\overline{A}$ e $\mathring{A}$ (si motivi la risposta).

Es 5 [Pt. 15] Per $x \neq 0$, sia $f(x) = x^2\cos(1/x)$.
(i) Esiste una estensione continua di f su $\mathbb{R}$?
(ii) f è uniformemente continua su $(0,2)$?
(iii) f è uniformemente continua su $(-8,-2)$?