Complemento 2

Continuità delle potenze e degli esponenziali

Proposizione 1 (continuità delle potenze) *Sia x un numero reale diverso da zero e $\{a_n\}$ una successione di numeri tale che $a_n \geq 0$ e $\lim a_n = a$. Allora $\lim a_n^x = a^x$.*

Dimostrazione Poiché $a_n \geq 0$ si ha che $a := \lim a_n \geq 0$. Distinguiamo vari casi.

(i) Assumiamo $x > 0$ e $a = 0$. Sia $\varepsilon > 0$; esiste $N \in \mathbb{Z}_+$ tale che $a_n < \varepsilon^{1/x}$ per ogni $n \geq N$, e dunque, per tali n, $a_n^x < \varepsilon$, il che vuol dire $\lim a_n^x = 0$.

(ii) Assumiamo $x > 0$ e $a = 1$. Sia p un intero positivo tale che $p > x$ e poniamo $b_n = a_n - 1$. Allora, $\lim b_n = 0$ ed esiste N tale che $|b_n| < 1$ per ogni $n \geq N$ e, per tali n,

$$(1 - |b_n|)^p \leq (1 - |b_n|)^x \leq (1 + b_n)^x < (1 + |b_n|)^x < (1 + |b_n|)^p \ .$$

Ma le successioni a sinistra e a destra di queste disuguaglianze tendono a 1 (p è un intero e "il prodotto dei limiti è il limite del prodotto) e quindi per il teorema del confronto per successioni anche $(1 + b_n)^x = a_n^x$ tende a 1.

(iii) Assumiamo $x > 0$ e $a > 0$. Allora, $\lim \dfrac{a_n^x}{a^x} = \lim \Big(\dfrac{a_n}{a}\Big)^x = 1$ e dunque $\lim a_n^x = a^x$.

(iv) Assumiamo $x < 0$ e $a > 0$. Allora, dalla definizione di potenza con esponente negativo e da (iii) segue che

$$\lim a_n^x = \lim \frac{1}{a_n^{-x}} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x \ .$$

La dimostrazione è completa. ∎

Proposizione 2 (continuità degli esponenziali) *Sia $a > 0$, x un numero reale e $\{x_n\}$ una successione di numeri tale che $\lim x_n = x$. Allora $\lim a^{x_n} = a^x$.*

Dimostrazione Se $a = 1$ la tesi è banalmente vera. Supponiamo ora che $a > 1$. Siano $\{r_n\}$ e $\{s_n\}$ due successioni di numeri razionali tali che[1]

$$r_n < x_n < s_n \quad \text{e} \quad \lim r_n = \lim s_n = x \ .$$

Poichè sappiamo che $a^{t_n} \to a^x$ per ogni successione di numeri razionali $\{t_n\}$ con limite x e che (essendo $a > 1$) $a^{r_n} < a^{x_n} < a^{s_n}$, la tesi segue dal teorema del confronta.

Infine se $a < 1$, poiché $(-x^n) \to (-x)$ e $a^{-1} > 1$, si ha che

$$\lim a^{x_n} = \lim \Big(\frac{1}{a}\Big)^{-x_n} = \Big(\frac{1}{a}\Big)^{-x} = a^x \ . \quad ∎$$

Esercizio Sia $0 < a_n \to a > 0$ e $x_n \to x$. Dimostrare che $a_n^{x_n} \to a^x$.

[1]Basta scegliere numeri razionali r_n e s_n rispettivamente negli intervalli $\Big(x_n - \dfrac{1}{n}, x_n\Big)$ e $\Big(x_n, x_n + \dfrac{1}{n}\Big)$: dal teorema del confronto (e dal fatto che $x_n \to x$) segue che $\lim r_n = \lim s_n = x$.