Complemento 3

Funzione esponenziale, logaritmo e funzioni iperboliche

Funzione esponenziale

Si ricorda che la successione

$$e_n := \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$$

è strettamente crescente e limitata e che, per definizione, il suo limite è il numero di Nepero

$$e := \lim e_n = \lim \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \ ;$$

inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = e^x \ . \tag{1}$$

Definizione 1 (Funzione esponenziale) *Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ . \tag{2}$$

Dal criterio del rapporto segue che la serie in (2), per ogni $x \in \mathbb{R}$, converge assolutamente. In particolare, per ogni x, si ha che

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \ . \tag{3}$$

Teorema 2 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.*

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton segue che

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\ \frac{x^k}{k!} \ , \qquad \text{con} \quad a_{nk} := \frac{n!}{(n-k)!n^k} \ . \tag{4}$$

Si noti che $a_{nk} > 0$ per ogni $n \geq k \geq 0$ e che

$$\begin{aligned} &a_{n0} = 1 \ , \qquad a_{n1} = 1 \ , && \forall\ n \\ &a_{nk} = \underbrace{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)}_{(k-1)\ \text{termini}} < 1 \ , && \forall\ n \geq k \geq 2 \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Si osservi anche che, per ogni k

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 1 \ . \tag{6}$$

Ora, se $n > m \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\Big|\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\ \frac{x^k}{k!}\Big| &= \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_{nk}\ \frac{x^k}{k!}\Big| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} a_{nk}\ \frac{|x|^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}\ .
\end{aligned}$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$, ricordando la (1) e la (6), si ottiene

$$\Big|e^x - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}\ .$$

Prendendo ora il limite per $m \to \infty$ in quest'ultima relazione e ricordando la (3) si ha la tesi. ∎

È interessante stimare i "resti" della serie esponenziale.

Proposizione 3 *Sia* $0 < t < n+1$ *con* $n \in \mathbb{N}$. *Allora*

$$0 < r_n(t) := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < \frac{t^n}{n!}\ \frac{n+1}{n+1-t}\ . \tag{7}$$

In particolare,

$$r_n(t) < \frac{t^n}{n!}\ \frac{n+1}{n} < \frac{1}{(n-1)!}\ \frac{1}{n-1}\ , \qquad \forall\ 0 < t \leq 1\ , \tag{8}$$

$$r_n(t) < 2\ \frac{t^n}{n!}\ , \qquad \forall\ 0 < t \leq \frac{n+1}{2}\ . \tag{9}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} &= \frac{t^n}{n!}\ \Big(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+2)(n+1)} + \frac{t^3}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \cdots\Big) \\
&< \frac{t^n}{n!}\ \Big(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+1)^2} + \frac{t^3}{(n+1)^3} + \cdots\Big) \\
&= \frac{t^n}{n!}\ \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{t}{n+1}\Big)^k = \frac{t^n}{n!}\ \frac{n+1}{n+1-t}\ .
\end{aligned}$$

Le (8) e (9) sono conseguenza immediata di (7). ∎

Si osservi che da (9) segue anche imediatamente che

$$|r_n(t)| \leq r_n(|t|) \leq |t|^n\ , \quad \forall\ n \geq 2\ ,\ \forall\ |t| \leq 1\ . \tag{10}$$

Teorema 4 *e è irrazionale.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che e sia razionale ossia che $e = p/q$ con p e q numeri naturali co–primi. Dal Teorema 2 segue che $e = \exp(1)$ e quindi, da (8) segue che

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}\,\frac{1}{q}\ .$$

Moltiplicando tale relazione per $q!$ otterremmo

$$0 < N := p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q} < 1\ ,$$

il che è impossibile essendo N un numero intero. ∎

Logartitmi

Proposizione 5 *Per ogni $a > 0$ e diverso da 1 e per ogni $x > 0$ esiste un unico $y \in \mathbb{R}$ tale che $a^y = x$. Tale y prende il nome di* **logaritmo in base** *a* **di** *x e si denota con $\log_a x$; si ha, dunque,*

$$a^{\log_a x} = x\ ,\quad \forall\ x \in (0,\infty)\ . \tag{11}$$

Il logaritmo gode delle seguenti proprietà:

(i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\ ,\quad \forall\ x, y \in (0,\infty)\ .$

(ii) $\log_a x^y = y \log_a x\ ,\quad \forall\ x > 0\ ,\ y \in \mathbb{R}\ .$

(iii) *Se $x < y$ si ha che $\log_a x < \log_a y$ se $a > 1$ e $\log_a x > \log_a y$ se $a < 1$.*

(iv) $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x\ ,\quad \forall\ a, b, x \in (0,\infty),\ a \neq 1 \neq b.$

Dimostrazione Dimostrazione Consideriamo dapprima il caso $a > 1$. Fissiamo $x > 0$ e sia $A := \{t \in \mathbb{R} :\ a^t < x\}$. Poiché $\lim a^{-n} = 0$, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^{-n} < x$ e dunque $-n \in A \neq \emptyset$. Poiché $\lim a^n = \infty$ segue che esiste m tale che $x < a^m$ e quindi tale m è un maggiorante per A. Sia $y = \sup A$. Supponiamo (per assurdo) che $a^y < x$. Sia $t_n = y + \frac{1}{n}$. Poiché $0 < a^{t_n} - a^y \to 0$, segue che esiste n tale che[1] $a^y < a^{t_n} < x$. Ma allora $y < t_n \in A$ e y non sarebbe un maggiorante. Supponiamo (ancora per assurdo) che $a^y > x$ e sia $s_n = y - \frac{1}{n}$. Di nuovo, esisterebbe n tale che $a^y > a^{s_n} > x$, il che implicherebbe che $s_n < y$ è un maggiorante contraddicendo la definizione di y. Quindi $y = a^x$ provando l'esistenza del logaritmo con base $a > 1$.

Per $0 < a < 1$, definiamo

$$\log_a x := -\log_{1/a} x\ , \tag{12}$$

da cui segue che

$$a^{\log_a x} := a^{-\log_{1/a} x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\log_{1/a} x} = x\ ,$$

mostrando che la proprietà fondamentale (11) vale per ogni $0 < a \neq 1$.

L'unicità segue dal fatto che, per $s < t$, $a^s < a^t$ se $a > 1$, mentre, $a^s > a^t$ se $a < 1$.

[1] Definizione di limite con $\varepsilon = x - a^y > 0$.

Dalle proprietà di a^x e da (11) segue che

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a (xy)} \ ,$$

e dall'unicità segue (i).
Analogamente

$$a^{\log_a (x^y)} = x^y = \Big(a^{\log_a x}\Big)^y = a^{y \log_a x} \ ,$$

e dall'unicità segue (ii).
(iii) nel caso $a > 1$ segue dalla stretta crescenza di a^x e per $a < 1$ dalla stretta decrescenza di a^x.
Infine,

$$a^{\log_a b \cdot \log_b x} = \Big(a^{\log_a b}\Big)^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x = a^{\log_a x}$$

e (sempre per lunicità) segue (iv). ∎

Definizione 6 (Logaritmo naturale) *Se $x > 0$ chiamiamo logaritmo naturale di x e lo denotiamo con $\log x$ il logaritmo in base e di x*

$$\log x := \log_e x \ .$$

Lemma 7

$$\log(1+t) < t \ , \qquad \forall \ -1 < t \neq 0 \ , \tag{13}$$

$$|\log(1+t)| \le 2|t| \ , \qquad \forall \ |t| \le \frac{1}{2} \ . \tag{14}$$

Dimostrazione Per $t > 0$,

$$1 + t < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

(per il Teorema 2), e prendendo il logaritmo di tale relazione (poiché i logaritmi in base $a > 1$ sono funzioni strettamente crescenti) segue la (13) per $t > 0$.
Sia ora $-1 < t < 0$. Poniamo $s = -t$ cosicché $0 < s < 1$. Si vede subito che la (13) è, in questo caso, equivalente a

$$e^s - 1 < se^s$$

il che è vero essendo

$$e^s - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{(k-1)!} = se^s \ .$$

Sia ora $-\frac{1}{2} \le t \le 0$ e poniamo $t = -s$ cosicché $0 \le s \le \frac{1}{2}$ e si noti che, in tal caso,

$$0 < \frac{1}{1-s} \le 1 + 2s \ .$$

Allora, per tali s, dalle proprietà del logaritmo e dalla (13) segue che

$$|\log(1+t)| = |\log(1-s)| = \log \frac{1}{1-s} \le \log(1+2s) \le 2s = 2|t| \ ,$$

che insieme alla (13) implica anche la (14). ∎

Proposizione 8 (continuità dei logaritmi) *Sia $1 \neq a > 0$ e sia $\{x_n\}$ una successione di numeri tale che $x_n > 0$ e $\lim x_n = x > 0$. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x \ . \tag{15}$$

Dimostrazione Consideriamo prima il caso in cui $a = e$. Sia $y_n := x_n/x$ cosicché $\lim y_n = 1$. Quindi esiste N tale che $|y_n - 1| < 1/2$ per ogni $n \geq N$; per tali n, dalle proprietà del logaritmo e da (14) segue che

$$|\log x_n - \log x| = |\log(x_n/x)| = |\log y_n| = |\log[1 + (y_n - 1)]| \leq 2|y_n - 1| \to 0 \ ,$$

che è la (18) nel caso $a = e$. Tutti gli altri casi derivano dalla relazione (iv) della Proposizione 5 con $b = e$. ∎

Proposizione 9 (Limiti) *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali diversi da zero e tale che $\lim a_n = 0$ allora*[2]*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1 \ , \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1 \ . \tag{17}$$

Sia ora $\lim a_n = \infty$, allora,

$$\lim \log a_n = \infty \tag{18}$$

e, per ogni $p > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{(a_n)^p} = \infty, \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{(a_n)^p} = 0. \tag{20}$$

Dimostrazione Dal Teorema 2 segue che $e^t = 1 + t + r_2(t)$ con $|r_2(t)| \leq t^2$ per $|t| \leq 1$ (vedi (10)). Dunque[3]

$$\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} - 1 = \frac{a_n + r_2(a_n)}{a_n} - 1 = \frac{r_2(a_n)}{a_n} \to 0 \ .$$

La (17) segue immediatamente dalla (16) osservando che se si pone $b_n := \log(1 + a_n)$ si ha che $\lim b_n = 0$ (Proposizione 8) e

$$\lim \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = \lim \frac{b_n}{e^{b_n} - 1} = 1.$$

Sia ora $a_n \to \infty$. Dato un qualunque $M > 0$ esiste N tale che $a_n > e^M$ per ogni $n \geq N$ e dunque, se $n \geq N$

$$\log a_n > \log e^M = M \ ,$$

il che significa che $\lim \log a_n = \infty$, dimostrando (18).

[2] Si noti che in (17) per poter definire il logaritmo va assunto che $1 + a_n > 0$, ma $a_n \to 0$ e quindi gli a_n sono definitivamente minori di 1 in modulo cosicché $1 + a_n > 0$ definitivamente.

[3] Per n sufficientemente grandi, $|a_n| < 1$ e dunque, per n sufficientemente grandi, $|r^2(a_n)|/|a_n| \leq |a_n| \to 0$.

Ricordiamo che,

$$\lim \frac{A^n}{n^p} = \infty \ , \qquad \forall\ A > 1\ ,\ p > 0\ , \tag{21}$$

da cui segue anche che

$$\lim \frac{A^n}{(n+1)^p} = \infty \ , \qquad \forall\ A > 1\ ,\ p > 0\ . \tag{22}$$

Sia $a_n \to \infty$ e sia $M > 0$. Da (22) segue che esiste $\bar N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{e^n}{(n+1)^p} > M\ , \quad \forall\ n \geq \bar N\ . \tag{23}$$

Sia ora N tale che $a_n > \bar N + 1$ per ogni $n \geq N$, il che implica che $[a_n] \geq \bar N$ per ogni $n \geq N$. Da (23) segue allora che, per ogni $n \geq N$,

$$\frac{e^{a_n}}{(a_n)^p} \geq \frac{e^{[a_n]}}{([a_n]+1)^p} > M\ ,$$

il che prova la (19).

Infine, se $a_n \to \infty$ e se poniamo $b_n := \log a_n$ si ha, per (18), che $b_n \to \infty$ e dunque

$$\lim \frac{\log a_n}{(a_n)^p} = \lim \frac{b_n}{e^{pb_n}} = \frac{1}{p} \lim \frac{1}{\frac{e^{pb_n}}{pb_n}} = 0\ ,$$

per la (19). ∎

Le funzioni iperboliche

Definizione 10 *Prendono rispettivamente il nome di* **seno iperbolico**, **coseno iperbolico**, **tangente iperbolica** *e* **cotangente iperbolica**, *le seguenti funzioni*

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , & \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh &= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\ , & \operatorname{cotanh} &= \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\ . \end{aligned}$$

Le funzioni $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ *e* $\tanh x$ *sono definite per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *mentre* $\operatorname{cotanh} x$ *è definita per* $x \neq 0$.

Si verifica immediatamente che $\cosh x$ è una funzioni pari[4] , mentre le funzioni $\operatorname{senh} x$, $\tanh x$ e $\operatorname{cotanh} x$ sono funzioni dispari.

È facile vedere che valgono le seguenti formule[5]

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{24}$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \tag{25}$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \cosh x \operatorname{senh} y + \operatorname{senh} x \cosh y\ . \tag{26}$$

[4]Una funzione $x \to f(x)$ si dice pari se $f(-x) = f(x)$ e si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$.

[5]Esercizio.

Usando la rappresentazione per serie, si vede che i termini pari si cancellano nell'espressione del seno iperbolico:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} x &= \lim \frac{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}}{2} \\
&= \lim \frac{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k - (-1)^k x^k}{k!}}{2} \\
&= \lim \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ . \qquad (27)
\end{aligned}$$

Del tutto analogamente i termini dispari si cancellano nell'espressione del coseno iperbolico e si ha che

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ . \qquad (28)$$

I seguenti limiti sono immediati: per ogni successione $a_n \to \infty$ si ha che

$$\lim \frac{\operatorname{senh} a_n}{e^{a_n}/2} = \lim \frac{\cosh a_n}{e^{a_n}/2} = 1 \ , \qquad (29)$$

$$\lim \tanh a_n = \lim \operatorname{cotanh} a_n = 1 \ . \qquad (30)$$

Infine, dimostriamo i seguento limiti che danno il comportamento delle funzioni iperboliche "vicino a zero".

Proposizione 11 *Se* $0 \neq a_n \to 0$ *si ha che*

$$\lim \frac{\operatorname{senh} a_n}{a_n} = 1 \ , \qquad (31)$$

$$\lim \frac{\cosh a_n - 1}{a_n^2} = \frac{1}{2} \ , \qquad (32)$$

$$\lim \frac{\tanh a_n}{a_n} = 1 \ , \qquad (33)$$

$$\lim \operatorname{cotanh} |a_n| = \infty \ . \qquad (34)$$

Dimostrazione Si osservi che, dalle (27) e (28) e dalla definizione di $r_n(t)$ segue che

$$|\operatorname{senh} t - t| \leq r_3(|t|) \ , \qquad \Big|\cosh t - 1 - \frac{t^2}{2}\Big| \leq r_4(|t|) \ . \qquad (35)$$

Dunque, ricordando (10), si ha, per n sufficientemente grandi, che

$$\Big|\frac{\operatorname{senh} a_n}{a_n} - 1\Big| = \Big|\frac{\operatorname{senh} a_n - a_n}{a_n}\Big| \leq \frac{r_3(|a_n|)}{|a_n|} \leq |a_n|^2 \to 0 \ ,$$

dimostrando la (31). Analogamente, si ha, per n sufficientemente grandi,

$$\Big|\frac{\cosh a_n - 1}{a_n^2} - \frac{1}{2}\Big| = \Big|\frac{\cosh a_n - 1 - \frac{a_n^2}{2}}{a_n^2}\Big| \leq \frac{r_4(|a_n|)}{|a_n^2|} \leq |a_n|^2 \to 0 \ ,$$

dimostrando anche (32).
Da (31) segue, ora,

$$\frac{\tanh a_n}{a_n} = \frac{\operatorname{senh} a_n}{a_n} \, \frac{1}{\cosh a_n} \to 1 \ .$$

La (34) segue dal fatto che $0 < \operatorname{senh}|a_n| \to 0$ e $\cosh|a_n| \to 1$. ∎