Complemento 4

Serie doppie

Lemma 1 *Siano $\alpha_{nk} \geq 0$ tali che, per ogni n e k, $\alpha_{n+1k} \geq \alpha_{nk}$ e $\alpha_{nk+1} \geq \alpha_{nk}$. Allora*

$$\sup_{n,k} \alpha_{nk} = \sup_n \sup_k \alpha_{nk} = \sup_k \sup_n \alpha_{nk}. \tag{1}$$

Dimostrazione Basta dimostrare la prima uguaglianza in (1) (l'altra si ottiene applicando quanto dimostrato a $\alpha'_{nk} = \alpha_{kn}$).

Sia $\alpha = \sup_{n,k} \alpha_{nk}$. Vi sono due casi: $\alpha = \infty$ oppure $\alpha < \infty$. Nel primo caso, per ogni M esistono n_0 e k_0 tali che $\alpha_{n_0 k_0} > M$. Quindi se $N := \max\{n_0, k_0\}$ e $n, m \geq N$, si ha $\alpha_{nk} > M$ (essendo α_{nk} crescente in k ed n). Se denotiamo con $\beta_n = \sup_k \alpha_{nk}$ si ha che $\beta_n > M$ per ogni $n \geq N$ il che significa che $\sup_n \beta_n = \infty = \alpha$, che è quanto volevamo dimostrare.

Supponiamo ora che $\alpha < \infty$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esistono n_0 e k_0 tali che $\alpha \geq \alpha_{n_0 k_0} > \alpha - \varepsilon$. Quindi se $N := \max\{n_0, k_0\}$ e $n \geq N$ si ha che $\alpha \geq \sup_k \alpha_{nk} =: \beta_n > \alpha - \varepsilon$, il che significa che $\sup \beta_n = \alpha$. ∎

Corollario 2 (Serie doppie) **(i)** *Se $a_{nk} \geq 0$ allora*[1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \Big) . \tag{2}$$

Inoltre se una dei termini di questa equazione è finito, è finito anche l'altro e, denotando α tale valore comune, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\Big| \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{M} a_{nk} - \alpha \Big| < \varepsilon , \qquad \forall\ N, M \geq N_0 \tag{3}$$

(ii) *Se $a_{nk} \in \mathbb{R}$ allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \Big) < \infty \quad \iff \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| \Big) < \infty \tag{4}$$

e, se vale una delle disuguaglianze in (4), allora valgono (2) e (3).

Dimostrazione (i): Se prendiamo $\alpha_{nk} := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{ij}$, con $a_{ij} \geq 0$ si vede immediatamente che $\alpha_{n+1k} \geq \alpha_{nk}$ e $\alpha_{nk+1} \geq \alpha_{nk}$ e quindi , per il Lemma 1, si ottiene immediatamente (2). Eq. (3) deriva dal fatto che $\alpha = \sup_{n,k} \alpha_{nk}$.

(ii) Siano, ora, $a_{nk} \in \mathbb{R}$. La (4) deriva immediatamente da **(i)**. Inoltre, dalla (4) segue, in particolare, che convergono assolutamente le serie $\sum_k a_{nk}$ e $\sum_n a_{nk}$; e, poiché, $\Big| \sum_k a_{nk} \Big| \leq$

[1] Normalmente scriveremo $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ al posto di $\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \Big)$.

$\sum_k |a_{nk}|$ e $\Big|\sum_n a_{nk}\Big| \le \sum_n |a_{nk}|$ segue (sempre dalla (4)) che convergono assolutamente anche le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\Big) \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\Big).$$

Ricordiamo che, dato un numero reale x, x^+ e x^- denotano, rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di x;

$$x^+ := \max\{x,0\}\ , \qquad x^- := \max\{-x,0\} = -\min\{x,0\}\ , \tag{5}$$

e che $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$. Allora,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_{nk}^+ - a_{nk}^-) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^+ - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^- \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}^+ - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}^- = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(a_{nk}^+ - a_{nk}^-) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\ ,\end{aligned}$$

che dimostra la (2) nel caso generale.

Sia ora α il valore comune in (2) e poniamo

$$b_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\ , \qquad \bar b_k := \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}|\ ;$$

si noti che $\alpha = \sum_n b_n$. Dato $\varepsilon > 0$, sia N_0 tale che, per ogni $N \ge N_0$ si abbia

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} b_n - \alpha\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\ , \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} \bar b_k < \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{6}$$

Allora, per ogni $N, M \ge N_0$, troviamo

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{M} a_{nk} - \alpha\Big| &= \Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \alpha - \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=M+1}^{\infty} a_{nk}\Big| \\ &\le \Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \alpha\Big| + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=M+1}^{\infty} |a_{nk}| \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \alpha\Big| + \sum_{k=M+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| \\ &= \Big|\sum_{n=0}^{N} b_n - \alpha\Big| + \sum_{k=M+1}^{\infty} \bar b_k \overset{(6)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ . \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Esempio 3 Siano, per $0 \le k \le n$, $c_{nk} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| < \infty$$

allora[2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} c_{nk}. \tag{7}$$

Tale relazione segue dal Corollario 2 ponendo

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} c_{nk}, & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0, & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Esercizio Mostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7k)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7k)^3}$.

Svolgimento: Dal binomio di Newton segue che $(n+7k)^6 > n^3 k^3$ e quindi che $(n+7k)^3 > (nk)^{3/2}$ e dunque

$$\begin{aligned}
\sum_n \sum_k \frac{1}{(n+7k)^3} \quad &< \quad \sum_n \sum_k \frac{1}{(nk)^{3/2}} = \sum_n \Big(\frac{1}{(n)^{3/2}} \sum_k \frac{1}{k^{3/2}} \Big) \\
&= \Big(\sum_n \frac{1}{n^{3/2}} \Big) \Big(\sum_k \frac{1}{k^{3/2}} \Big) \\
&= \Big(\sum_n \frac{1}{n^{3/2}} \Big)^2 < \infty
\end{aligned}$$

e la tesi segue da **(i)** del Corollario 2.

[2] La (7) significa che, se $b_n := \sum_{k=0}^{n} c_{nk}$, la serie $\sum_{n \ge 0} b_n$ converge, che le serie $c_k := \sum_{n=k}^{\infty} c_{nk}$ convergono per ogni n e che $\sum_{n \ge 0} b_n = \sum_{k \ge 0} c_k$.