Complemento 5

Coseno, seno, e pi greco

Definizione 1 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$\begin{cases} \cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \cdots \\ \\ \operatorname{sen} x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \cdots \end{cases} \tag{1}$$

Osservazione 2 (i) Le due serie in (1) convergono assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto) e

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x\ . \end{cases} \tag{2}$$

(ii) Le formule (1) permettono di calcolare (con precisione arbitraria) il valore del seno e coseno in qualunque punto x. Ad esempio,

$$\cos 2 = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} + r = -\frac{131}{315} + r\ , \qquad r := \sum_{k=5}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}\ , \tag{3}$$

e da (9) del Complemento 3 segue che $|r| < \sum_{k=10}^{\infty} \frac{2^k}{k!} < \frac{2^{11}}{10!} = \frac{8}{14175}$, e quindi

$$-0.417 < -\frac{5903}{14175} < \cos 2 < -\frac{841}{2025} < -0.415\ . \tag{4}$$

Il comportamento del seno e coseno "vicino" a $x = 0$ è il seguente:

Lemma 3 *Per ogni $|x| \le 1$ si ha*

$$|\operatorname{sen} x - x| \le \frac{|x|^3}{3}\ , \qquad \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^4}{12}\ ; \tag{5}$$

$$|\operatorname{sen} x| \le \frac{4}{3}|x|\ , \qquad |1 - \cos x| \le \frac{7}{12}x^2\ ; \tag{6}$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| \le \frac{x^2}{3}\ , \qquad \left|\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{x^2}{12}\ , \quad (x \ne 0)\ . \tag{7}$$

Dimostrazione Dalla definizione di seno e coseno e dalla (9) del Complemento 3 segue che, per $|x| \le 1$,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} x - x| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\ \frac{|x|^3}{6} = \frac{|x|^3}{3} \\ \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| &= \Big|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &\le \sum_{k=4}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\frac{x^4}{4!} = \frac{x^4}{12}. \end{aligned}$$

Da (5) segue che

$$|\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x - x + x| \leq |\operatorname{sen} x - x| + |x| \leq |x|\big(\frac{x^2}{3} + 1\big) \leq \frac{4}{3}|x|$$
$$|1 - \cos x| \leq \Big|1 - \cos x - \frac{x^2}{2}\Big| + \frac{x^2}{2} \leq x^2\big(\frac{x^2}{12} + \frac{1}{2}\big) = \frac{7}{12}x^2.$$

Infine (7) segue immediatamente da (5) dividendo per $|x|$. ∎

Da (7) seguono immediatamente i seguenti limiti notevoli[1]

Corollario 4 *Se* $0 \neq a_n \to 0$, *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1 \ , \tag{8}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2} \ . \tag{9}$$

Teorema 5 (Formula di addizione per il coseno)

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \ , \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Dimostrazione Dalla formula per il binomio di Newton,

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(x+y)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} x^j y^{2k-j} \\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{j=0}^{2k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{0\leq j\leq 2k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \ .
\end{aligned} \tag{11}$$

Ora, poniamo[2]

$$\begin{aligned}
P &:= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{\substack{0\leq j\leq 2k \\ j \text{ pari}}} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!} \frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!}
\end{aligned} \tag{12}$$

[1] Si osservi che se $a_n \to 0$ allora esiste N tale che $|a_n| < 1$ per ogni $n \geq N$.

[2] Si noti che nella definizione di D il termine con $k = 0$ non appare e pertanto la somma su k in D parte da $k = 1$. Inoltre, le j dispari tra 0 e $2k$ sono date da $j = 2h + 1$ con $0 \leq h \leq k - 1$.

$$\begin{aligned} D &:= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{\substack{0\leq j\leq 2k \\ j \text{ dispari}}} \frac{x^j}{j!}\frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \\ &= \sum_{k\geq 1}(-1)^k \sum_{h=0}^{k-1} \frac{x^{(2h+1)}}{(2h+1)!}\frac{y^{2(k-h)-1}}{(2(k-h)-1)!} \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} \sum_{h=0}^{n} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}\frac{y^{2(n-h)+1}}{(2(n-h)+1)!} \\ &= -\sum_{n\geq 0}(-1)^{n} \sum_{h=0}^{n} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}\frac{y^{2(n-h)+1}}{(2(n-h)+1)!}\ , \end{aligned}$$

e si noti che

$$\max\{|P|,|D|\} \leq \sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{2k} \frac{|x|^j}{j!}\frac{|y|^{2k-j}}{(2k-j)!} = \cosh(|x|+|y|)\ ,$$

e dunque, che le serie che definiscono P e D convergono assolutamente. In particolare, segue che

$$\cos(x+y) = P + D\ .$$

Per il Corollario 2 del Complemento 4 (si veda anche l'Esempio 3), possiamo scambiare l'ordine delle somme, ottenendo

$$\begin{aligned} P &:= \sum_{h\geq 0}\sum_{k\geq h}(-1)^k \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!} \\ &= \sum_{h\geq 0}(-1)^h \sum_{k\geq h}(-1)^{k-h} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!} \\ &= \sum_{h\geq 0}(-1)^h \sum_{j\geq 0}(-1)^{j} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2j}}{(2j)!} \\ &= \Big(\sum_{h\geq 0}(-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0}(-1)^j \frac{y^{2j}}{(2j)!}\Big) \\ &= \cos x \cos y\ , \end{aligned}$$

e in maniera del tutto analoga si vede che $D = -\operatorname{sen} x\, \operatorname{sen} y$ ossia la tesi. ∎

Osservazione 6 Prendendo $y = -x$ in (10) e ricordando (2) si ha che

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x := (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1, \tag{13}$$

da cui

$$|\cos x| \leq 1\ , \qquad |\operatorname{sen} x| \leq 1\ , \quad \forall\ x\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

Prendendo $x = y$ in (10) otteniamo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\ . \tag{15}$$

Proposizione 7 ("Permanenza del segno per il coseno") *Sia x_0 tale che $\cos x_0 > 0$ (oppure $\cos x_0 < 0$). Allora esiste $\delta > 0$ tale $\cos x > 0$ (rispettivamente, $\cos x < 0$) per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.*

Dimostrazione Consideriamo il caso $\cos x_0 > 0$ (il caso negativo si tratta in maniera del tutto analoga e viene lasciato per esercizio). Sia $0 < \delta := |\cos x_0|/2$ e si osservi che $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ se e solo se $x = x_0 + y$ con $|y| \le \delta$. Dunque se $x = x_0 + y$ con $|y| \le \delta$, da (10), (14) e (6) segue che

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos(x_0 + y) = \cos x_0 \cos y - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} y \\
&= \cos x_0 - \Big(\cos x_0 (1 - \cos y) + \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} y \Big) \\
&\ge \cos x_0 - (|1 - \cos y| + |\operatorname{sen} y|) \\
&\ge \cos x_0 - \Big(\frac{7}{12}|y| + \frac{4}{3}|y| \Big) \\
&\ge \cos x_0 - \frac{23}{12}\,|y| \\
&\ge \cos x_0 - \frac{23}{12}\,\delta \\
&> \cos x_0 - 2\delta = 0 \ . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 8 *Esiste $\beta \in (0, 2)$ tale che $\cos \beta = 0$ e $\cos x > 0$ per ogni $x \in [0, \beta)$.*

Dimostrazione Sia $P := \{b > 0 : \cos x > 0 \text{ per ogni } 0 \le x \le b\}$. Poiché $\cos 0 = 1$, dal Teorema 7 segue che esiste $\delta > 0$ tale che $\cos x > 0$ per ogni $|x| \le \delta$ e quindi $\delta \in P$ mostrando che $P \ne \emptyset$. Dalla definizione di P segue che se $y > 0$ e $\cos y < 0$, allora y è un maggiorante per P: infatti, se y non fosse un maggiorante, esisterebbe $b \in P$ tale che $b > y$, ma questo, per definizione di P, implicherebbe che $\cos y > 0$. In particolare, da (4) segue che 2 è un maggiorante per P. Sia $\beta = \sup P$. Se fosse $\cos \beta > 0$, dal Teorema 7 seguirebbe che $\cos x > 0$ per $x \in [\beta - \delta, \beta + \delta]$ con un opportuno $\delta > 0$; quindi, poiché $\beta - \delta < \beta$, che è l'estremo superiore di P, esisterebbe $b \in P$ tale che $\beta - \delta < b$, ma questo implicherebbe che $\cos x > 0$ per ogni $0 \le y \le \beta + \delta$ e quindi $\beta + \delta \in P$, contraddicendo il fatto che β è un maggiorante. Se fosse $\cos \beta < 0$, dal Teorema 7 seguirebbe che $\cos x < 0$ per $x \in [\beta - \delta, \beta + \delta]$ con un opportuno $\delta > 0$: ma questo significherebbe che $\beta - \delta < \beta$ è un maggiorante contraddicendo il fatto che β è l'estremo superiore di P. Dunque $\cos \beta = 0$. Sia, infine, $0 < y < \beta$. Allora, (poiché β è l'estremo superiore di P) esiste $b \in P$ tale che $y < b < \beta$, e dunque (definizione di P) $\cos y > 0$. $\blacksquare$

Definizione 9 (Pi greco) *$\pi := 2\beta$ dove β è il numero nel Teorema 8.*

Proposizione 10 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \pi = -1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$,
$\cos \frac{3}{2}\pi = 0$, $\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$.

Dimostrazione Dalla definizione di π e dal Teorema 8 segue che $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; dunque da (13) segue che $|\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}| = 1$. D'altra parte, da (7) segue che se $0 < x \le 1$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \ge -\frac{1}{3}$ ossia $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \ge \frac{2}{3}$, e quindi, in particolare, $\operatorname{sen} x > 0$ se $0 < x \le 1$. Da (10) e dalla definizione di π segue che, per ogni $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x$; quindi se $0 < x < \min\{1, \frac{\pi}{2}\}$, $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0$, il che implica $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$.

Da (15) segue che $\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \text{sen}^2\frac{\pi}{2} = -1$ e quindi, per (13), $\text{sen}\,\pi = 0$. Ancora da (15) segue che $\cos 2\pi = \cos^2\pi - \text{sen}^2\pi = 1$ e quindi (da (13)) $\text{sen}\,2\pi = 0$.
Infine, $\cos\frac{3}{2}\pi = \cos(2\pi - \frac{\pi}{2}) = \cos 2\pi\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,2\pi\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0$, e $-1 = \cos\pi = \cos\big(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\big) = \cos\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi$. ∎

Da (10) e dalla Proposizione 10 segue immediatamente che

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}\,x \tag{16}$$

e anche (scrivendo $\cos x = \cos\big((x-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\big)$) che

$$\text{sen}\,\big(x - \frac{\pi}{2}\big) = -\cos x\ . \tag{17}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\text{sen}\,(x+y) &\overset{(16)}{=} \cos\big(x - \frac{\pi}{2} + y\big)\\ &= \cos\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\cos y - \text{sen}\,\big(x - \frac{\pi}{2}\big)\,\text{sen}\,y\\ &\overset{(17)}{=} \text{sen}\,x\cos y + \cos x\,\text{sen}\,y\ ,\end{aligned}$$

ossia

Teorema 11 (Formula di addizione per il seno)

$$\text{sen}\,(x+y) = \text{sen}\,x\cos y + \cos x\,\text{sen}\,y\ , \qquad \forall\ x,y\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Dalle formule di addizione (Teoremi 5 e 11) seguono immediatamente (**esercizio**) molte altre relazioni tra cui:

$$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\cos x\ , \tag{19}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x\ , \qquad \text{sen}\,(x+\pi) = -\,\text{sen}\,x\ , \tag{20}$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\ , \qquad \text{sen}\,(x+2\pi) = \text{sen}\,x\ , \tag{21}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\ , \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ , \tag{22}$$

$$\text{sen}\,x + \text{sen}\,y = 2\,\text{sen}\,\big(\frac{x+y}{2}\big)\cos\big(\frac{x-y}{2}\big)\ , \tag{23}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\big(\frac{x+y}{2}\big)\cos\big(\frac{x-y}{2}\big)\ , \tag{24}$$

$$\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)\ , \tag{25}$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)\ , \tag{26}$$

$$\text{sen}\,x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\text{sen}\,(x+y) + \text{sen}\,(x-y)\Big)\ , \tag{27}$$

$$\cos x\,\text{sen}\,y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) - \text{sen}\,(x-y)\Big)\ . \tag{28}$$

Infine, dimostriamo il seguente

Teorema 12 ("Continuità del seno e del coseno") *Se* $\lim a_n = a$, *allora* $\lim \cos a_n = \cos a$ *e* $\lim \operatorname{sen} a_n = \operatorname{sen} a$.

Dimostrazione Il caso $a = 0$ segue immediatamente da (6). Nel caso generale poniamo $t_n := a_n - a$ così che $t_n \to 0$. Allora, $\cos a_n = \cos(a + t_n) = \cos a \cos t_n - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} t_n \to \cos a$ e analogamente $\operatorname{sen} a_n = \operatorname{sen}(a + t_n) = \operatorname{sen} a \cos t_n + \cos a \operatorname{sen} t_n \to \operatorname{sen} a$. ∎