Complemento 6

Sottosuccessioni. Massimo e minimo limite

Definizione 1 *Una sottosuccessione (o successione estratta) di una successione $\{a_n\}$ è una successione $\{b_k\}$ formata da elementi $b_k = a_{n_k}$ per una qualche successione $\{n_k\}$ strettamente crescente e a valori in $\mathbb{N}$.*

Lemma 2 *Sia $\{a_n\}$ una successione non limitata superiormente[1]. Allora esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ strettamente crescente e tale che $\lim a_{n_k} = \infty$.*

Dimostrazione Definiamo la successione $\{n_k\}$ in modo ricorsivo. Sia $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_1} > 1$. Scegliamo poi $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} > \max\{a_{n_1}, 2\}$ e, iterativamente, scegliamo $n_{k+1} > n_k$ tale che $a_{n_{k+1}} > \max\{a_{n_k}, k\}$. La sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ ha le proprietà richieste. ∎

Lemma 3 *Se $\{a_n\}$ ammette limite (incluso $\pm\infty$) allora qualunque sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ ha lo stesso limite.*

Dimostrazione Se $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ dalle definizione di limite segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$. Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ allora $\lim n_k = \infty$ e quindi esiste un $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_k > N$ per ogni $k \geq k_0$ e dunque se $k \geq k_0$ si avrà che $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ e quindi $\lim a_{n_k} = a$. Se $a_n \to \infty$, dato M esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq N$ e, come prima, si trova un k_0 tale che $n_k > N$ per ogni $k \geq k_0$ cosicché, per tali k, $a_{n_k} > M$ mostrando che $\lim a_{n_k} = \infty$; il caso $\lim a_n = -\infty$ si tratta in modo analogo. ∎

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata superiormente e si consideri la successione

$$\bar{a}_k := \sup\{a_n : \ n \geq k\} = \sup_{n\geq k} a_n \ . \tag{1}$$

Poiché l'insieme $\{n \geq k+1\} \subset \{n \geq k\}$ si ha che tale successione è monotona decrescente e dunque esiste il limite che coincide con l'estremo inferiore dei valori della successione (che può anche essere $-\infty$) :

$$\inf \bar{a}_k = \lim \bar{a}_k \ . \tag{2}$$

Analogamente se $\{a_n\}$ è limitata inferiormente la successione

$$\underline{a}_k := \inf\{a_n : \ n \geq k\} = \inf_{n\geq k} a_n \ , \tag{3}$$

è monotona crescente e si ha che

$$\sup \underline{a}_k = \lim \underline{a}_k \ , \tag{4}$$

(e tale valore può essere $+\infty$).

[1] Ossia, l'insieme dei valori di $\{a_n\}$ non è limitato superiormente: $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$ (che è anche equivalente a dire che per ogni M $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$).

Definizione 4 *Se $\{a_n\}$ è una successione si definisce il suo massimo limite (o limite superiore) come*

$$\limsup a_n := \overline{\lim}\, a_n := \begin{cases} +\infty & \text{se } \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty \\ \\ \lim \bar{a}_k = \inf \bar{a}_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\bar{a}_k$ è definito in (1). Analogamente, si definisce il minimo limite (o limite inferiore) di $\{a_n\}$ come

$$\liminf a_n := \underline{\lim}\, a_n := \begin{cases} -\infty & \text{se } \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty \\ \\ \lim \underline{a}_k = \sup \underline{a}_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\underline{a}_k$ è definito in (3).

Osservazione 5 (i) Chiaramente $\underline{a}_n \le \bar{a}_n$ e dunque

$$\underline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, a_n \tag{5}$$

e, più sotto, vedremo che vale il segno di uguaglianza se e solo la successione $\{a_n\}$ ha limite.
(ii) Se $a_n \le b_n$ allora

$$\underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n\ , \qquad \overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, b_n \tag{6}$$

in particolare se $\{a_n\}$ è limitata, ossia se, per due numeri reali $c \le C$ si ha che $c \le a_n \le C$ per ogni n, allora

$$c \le \underline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, a_n \le C\ . \tag{7}$$

(iii) $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$ *se e solo se* $\lim a_n = -\infty$ e, analogamente $\underline{\lim}\, a_n = +\infty$ *se e solo se* $\lim a_n = \infty$.

Dimostriamo solo l'affermazione relativa al limite superiore, quella relativa al minimo limite si dimostra in modo del tutto analogo. Se $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$ allora $\inf \bar{a}_n = -\infty$ quindi per ogni M esiste n tale $\bar{a}_n < M$ ma allora $a_k \le \bar{a}_n < M$ per ogni $k \ge n$, il che vuol dire che $\lim a_k = -\infty$. Viceversa, se $\lim a_n = -\infty$ allora per ogni M esiste n tale che per ogni $k \ge n$, $a_k < M$ e quindi (prendendo l'estremo superiore per $k \ge n$) $\bar{a}_n \le M$ il che vuol dire che $\lim \bar{a}_n = -\infty$ ossia $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$. ∎

Chiamiamo M un "maggiorante (rispettivamente, minorante) definitivo" di $\{a_n\}$ se esiste N tale che $a_n \le M$ (rispettivamente, $a_n \ge M$) per ogni $n \ge N$.

Lemma 6 *Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\overline{\lim}\, a_n = M \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ $M + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo di $\{a_n\}$. Analogamente se $\underline{\lim}\, a_n = m \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, $m - \varepsilon$ è un minorante definitivo di $\{a_n\}$*

Dimostrazione [2] Poiché $M = \inf \bar{a}_n$, segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{a}_N < M + \varepsilon$. Quindi, per ogni $n \ge N$ (per definizione di $\bar{a}_n$) si ha che $a_n \le \bar{a}_N < M + \varepsilon$. ∎

[2] Dimostriamo solo l'affermazione relativa al massimo limite; quella relativa al minimo limite si dimostra in modo del tutto analogo.

Teorema 7 *Sia $\{a_n\}$ una successione.*
(i) *Esistono sottosuccessioni di $\{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{m_k}\}$, tali che*

$$\lim a_{n_k} = \overline{\lim}\, a_n \ , \qquad \lim a_{m_k} = \underline{\lim}\, a_n \ . \tag{8}$$

(ii) *Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ che ammette limite (eventualmente $\pm\infty$) allora*

$$\underline{\lim}\, a_n \le \lim a_{n_k} \le \overline{\lim}\, a_n \ . \tag{9}$$

(iii) *$\{a_n\}$ ammette limite (eventualmente $\pm\infty$) se e solo se $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$.*

Dimostrazione (i) Dimostriamo la prima uguaglianza in (8); la seconda si tratta in modo del tutto analogo.

Assumiamo, dapprima, che $\overline{\lim}\, a_n = M \in \mathbb{R}$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste un intero $m > j$ tale che[3]

$$\bar{a}_m < M + \frac{1}{j} \ ; \tag{10}$$

e dalla definizione di $\bar{a}_m$ segue che esiste $m_j \ge m$ tale che

$$\bar{a}_m - \frac{1}{j} < a_{m_j} \ . \tag{11}$$

Ma allora, poiché $M \le \bar{a}_m$ e $a_{m_j} \le \bar{a}_m$, da (10) e (11) segue che

$$M - \frac{1}{j} \le \bar{a}_m - \frac{1}{j} < a_{m_j} \le \bar{a}_m < M + \frac{1}{j}$$

e quindi $\lim a_{m_j} = M$. Poiché $m_j \ge m > j$, $\lim m_j = +\infty$ e quindi, dal Lemma 2 applicato alla successione $\{m_j\}$, segue che esiste una sottosuccessione $\{m_{j_k}\}$ di $\{m_j\}$ strettamente crescente con limite $+\infty$ e, in conclusione, otteniamo la tesi ponendo $n_k := m_{j_k}$.

Nel caso $\overline{\lim}\, a_n = \infty$ la tesi segue dal Lemma 2.

Se $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$ allora (Osservazione 5, punto (iii)) $\lim a_n = -\infty$ (e la tesi vale con $n_k = k$).

(ii) Dimostriamo che se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ che ha limite (incluso $\pm\infty$) allora

$$\lim a_{n_k} \le \overline{\lim}\, a_n \ ; \tag{12}$$

la dimostrazione per il limite inferiore è del tutto analoga.
Se $\overline{\lim}\, a_n = \infty$, la disuguaglianza (12) è evidentemente soddisfatta.
Se $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$, da (iii)–Osservazione 5 segue che $\lim a_n = -\infty$ e quindi, dal Lemma 3, segue che $\lim a_{n_k} = -\infty$, da cui (12) (col segno di uguaglianza).
Supponiamo ora che $\overline{\lim}\, a_n =: M \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_{n_k} = -\infty$ la (12) è soddisfatta. Sia dunque $\lim a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Dal Lemma 6 segue che esiste k_1 tale che

$$a_k < M + \varepsilon \ , \qquad \forall\ k \ge k_1 \ , \tag{13}$$

e, quindi, se k_2 è tale che $n_k \ge k_1$ per ogni $k \ge k_2$ si ha che

$$a_{n_k} < M + \varepsilon \ , \qquad \forall\ k \ge k_2 \ ,$$

[3] Segue dal fatto che $\lim \bar{a}_n = M$. Si noti che se una successione a_n converge ad L allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} a_{k+j} = L$ (Lemma 3 con $n_k := k + j$).

e, prendendo il limite per $k \to \infty$ in tale relazione si ottiene che $a \le M + \varepsilon$, che, per l'arbitrarietà di[4] ε, implica che $a \le M$, ossia la (12).

(iii) Se $\{a_n\}$ ammette limite, per il Lemma 3, qualunque sua sottosuccessione ha lo stesso limite e dunque, per il punto (i), $\liminf a_n = \lim a_n = \limsup a_n$.

Se $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = +\infty$ allora $\lim a_n = +\infty$ (Osservazione 5, (iii)). Stesso ragionamento se $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = -\infty$. Infine, supponiamo che $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = a \in \mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$. Dal Lemma 6 segue che esiste $n \in \mathbb{N}$ take che $a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon$ per ogni $k \ge n$, ma questo significa che $\lim a_n = a$.

Il Teorema è completamente dimostrato. ∎

Infine, dimostriamo che il limite superiore coincide con l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi e anche con il massimo dei limiti ottenibili tramite sottosuccessioni (e analoghe affermazioni per il limite inferiore).

Data una successione $\{a_n\}$, definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+ &:= \big\{M :\ M \text{ è maggiorante definitivo di } \{a_n\}\big\} \\ \mathcal{M}_- &:= \big\{M :\ M \text{ è minorante definitivo di } \{a_n\}\big\} \\ \mathcal{L} &:= \big\{L :\ \exists\, \{a_{n_k}\} \text{ tale che } \lim a_{n_k} = L\big\}\ . \end{aligned}$$

Proposizione 8 *Sia $\{a_n\}$ una successione limitata superiormente. Allora*

$$\overline{\lim}\, a_n = \inf \mathcal{M}_+ = \max \mathcal{L}\ . \tag{14}$$

Analogamente, se $\{a_n\}$ è limitata inferiormente, si ha

$$\underline{\lim}\, a_n = \sup \mathcal{M}_- = \min \mathcal{L}\ . \tag{15}$$

Dimostrazione Dimostriamo solo (14), lasciando (15) per esercizio.

Sia $\lambda := \overline{\lim}\, a_n$ e $\mu := \inf \mathcal{M}_+$. Per ogni $\varepsilon > 0$, $\lambda + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo (Lemma 6); quindi $\mu \le \lambda + \varepsilon$ e (per l'arbitrarietà di ε) $\mu \le \lambda$. D'altra parte, per ogni $M \in \mathcal{M}_+$ esiste N tale che $a_n \le M$ per ogni $n \ge N$ e quindi $\lambda \le \bar{a}_n \le M$. Dunque, λ è un minorante di $\mathcal{M}_+$ e quindi $\mu \ge \lambda$, cosicché $\lambda = \mu$.

Se, come sopra, $\lambda := \overline{\lim}\, a_n$, da (ii)–Teorema 7 segue che $L \le \lambda$ per ogni $L \in \mathcal{L}$. D'altra parte per il punto (i) dello stesso teorema segue che esiste $M \in \mathcal{L}$ tale che $M = \lambda$ e dunque tale M è il massimo di $\mathcal{L}$ che coincide con λ. ∎

[4]Se a e b sono numeri reali tali che per ogni $\varepsilon > 0$, $a \le b + \varepsilon$ allora $a \le b$; analogamente se $a \ge b - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ allora $a \ge b$ (esercizio).