Complemento 8

Funzioni continue e topologia

Si ricorda che una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice continua su E, e si denota $f \in C(E)$, se f è continua in ogni punto di E ossia se

$$\forall\, y \in E\ ,\ \forall\, \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ ,\quad \forall\, x \in E\ ,\ |x - y| < \delta\ . \tag{1}$$

Si ricordano anche le seguenti caratterizzazioni della continuità:

Proposizione 1 (i) *$f : E \to \mathbb{R}$ è continua in $y \in E \cap \mathcal{D}E$ se e solo se $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.*
(ii) *$f : E \to \mathbb{R}$ è continua in $y \in E$ se e solo se, comunque presa una successione $\{x_n\} \subseteq E$ tale che $\lim x_n = y$, si ha che $\lim f(x_n) = f(y)$.*

Diamo ora una caratterizzazione completamente topologica della continuità delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se, per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ è[1] aperto.*

Dimostrazione Sia f continua su $\mathbb{R}$, A un aperto e dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è un aperto. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$ la tesi è vera. Se $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, sia $x_0 \in f^{-1}(A)$ e $y_0 := f(x_0) \in A$. Poiché A è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $I := (y_0 - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq A$. Poiché f è continua in x_0, esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in J := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ma questo significa che $J \subseteq f^{-1}(A)$, ossia, che $f^{-1}(A)$ è aperto.
Assumiamo, ora, che $f^{-1}(A)$ è aperto, per ogni aperto A e dimostriamo che f è continua su $\mathbb{R}$. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. L'intervallo $J := (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ con $y_0 := f(x_0)$ è un insieme aperto e quindi $f^{-1}(J)$ è un insieme aperto che contiene x_0. Dunque deve esistere un intervallo aperto $I \subseteq f^{-1}(J)$ che contiene x_0 e che possiamo assumere della forma $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$: ma questo significa esattamente che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni x tale che $|x - x_0| < \delta$. ∎

Non è difficile dimostrare che[2] questa Proposizione si generalizza nel seguente modo

Proposizione 3 *$f : E \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ esiste un aperto U tale che $f^{-1}(A) = U \cap E$.*

È immediato verificare che, per qualunque funzione f e qualunque insieme A,

$$\big(f^{-1}(A)\big)^c = f^{-1}(A^c)\ .$$

Dunque dalla Proposizione 2, segue che f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso per ogni C chiuso.
D'altra parte, non è, in generale, vero che, se f è continua, l'immagine di un aperto è aperta o che l'immagine di un chiuso è chiusa, come segue dai seguenti esempi

$$\text{sen}\,\big((0,\pi)\big) = (0,1]\ , \qquad \tanh\big([0,\infty)\big) = [0,1)\ .$$

Però, dal teorema di Weierstrass e dal teorema dei valori intermedi segue che:

Proposizione 4 *Se $f \in C([a,b])$, allora $f([a,b]) = [m,M]$ dove $m = \min_{[a,b]} f$ e $M = \max_{[a,b]} f$*

[1] Si ricorda che, per una qualunque $f : E \to \mathbb{R}$ e qualunque insieme A, $f^{-1}(A) := \{x \in E :\ f(x) \in A\}$.
[2] **Esercizio.**

Più in generale, si ha

Proposizione 5 *Se $f \in C(K)$ con K compatto, allora $f(K)$ è un compatto.*

Dimostrazione Fissiamo una successione $\{y_n\} \subseteq f(K)$ e siano $x_n \in K$ tali che $f(x_n) = y_n$. Poichè K è compatto, esiste $x_{n_k} \to z \in K$ e poichè f è continua, $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = f(z) \in f(K)$, il che mostra che $f(K)$ è compatto. ∎

Si osservi, però, che, in generale, la preimmagine di un insieme compatto non è compatta: ad esempio, $\operatorname{sen}^{-1}\big([-1,1]\big) = \mathbb{R}$.

L'altra struttura conservata da una trasformazione continua è la connessione, che in $\mathbb{R}$ significa:

Proposizione 6 *Se $f \in C(I)$ con I intervalllo, allora $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione Dal Lemma 12 del Complemento 7 si ha che esistono intervalli compatti $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ tali che $I = \bigcup I_n$. Ora, $f(I) = \bigcup f(I_n)$ e, per la Proposizione 4, gli $f(I_n)$ sono intervalli compatti e, chiaramente, $f(I_n) \subseteq f(I_{n+1})$; quindi (di nuovo per il Lemma 12 del Complemento 7) segue che $f(I)$ è un intervallo. ∎

Continuità di funzioni inverse

Proposizione 7 *Sia K un compatto di $\mathbb{R}$ e $f \in C(K)$ iniettiva. Allora, la funzione inversa $g = f^{-1}$ è continua su*[3] *$D := f(K)$.*

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che g non sia continua su D. Allora, deve esistere un $y_0 \in D$ e una successione $\{y_n\} \subseteq D$ con $\lim y_n = y_0$ tale che $x_n := g(y_n)$ non converge a $x_0 := g(y_0)$. Quindi esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che, per infiniti n, $|x_n - x_0| \geq \varepsilon$, il che implica che esiste una sottosuccessione x_{n_j} tale che

$$|x_{n_j} - x_0| \geq \varepsilon \ . \tag{2}$$

Poiché K è compatto, esisterebbe una ulteriore sottosuccessione $x_{m_k} := x_{n_{j_k}}$ convergente ad un $\bar{x} \in K$ e, per (2), $|\bar{x} - x_0| \geq \varepsilon > 0$. Ma poiché f è continua, $f(\bar{x}) = \lim f(x_{m_k}) = \lim y_{m_k} = \lim y_n = y_0 = f(x_0)$, il che, per l'iniettività di f, contraddice il fatto che $\bar{x} \neq x_0$. ∎

Proposizione 8 *Sia I un intervallo e $f \in C(I)$. Allora, f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona su I.*

Dimostrazione Una funzione strettamente monotona è sempre iniettiva.
Assumiamo, ora, che f sia iniettiva e supponiamo, per assurdo, che non sia strettamente monotona. Allora, devono esistere tre punti $x < y < z$ in I tali che, se poniamo $c := \min\{f(x), f(z)\}$ e $d := \max\{f(x), f(z)\}$, si ha o $f(y) > d$ oppure $f(y) < c$. Supponiamo, ad esempio, che $f(y) > d$ e sia $d < \alpha < f(y)$. Poiché, $f(x) \leq d < \alpha < f(y)$, dal teorema del valor medio[4], segue che esiste $x_1 \in (x, y)$ tale che $f(x_1) = \alpha$; allo stesso modo, poiché $f(z) \leq d < \alpha < f(y)$, segue che esiste $x_2 \in (y, z)$ tale che $f(x_2) = \alpha$ e quindi $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 < x_2$, il che contraddice l'iniettività. Il caso $f(y) < c$ si tratta analogamente. ∎

---

[3] D è un compatto (Proposizione 5).

[4] f assume su (x, y) tutti i valori tra $m := \max_{(x,y)} f$ e $M = \max_{(x,y)} f$ e $m \leq f(x) < f(y) \leq M$.

Proposizione 9 *Sia I un intervallo e $f \in C(I)$ iniettiva. Allora, la funzione inversa $g = f^{-1}$ è continua su*[5] $J := f(I)$.

Dimostrazione Per la Proposizione 8, f è strettamente monotona su I. Assumiamo che f sia strettamente crescente (altrimenti si consideri $-f$). Consideriamo un $\bar y$ interno a J. Allora, esisteranno $y_1, y_2 \in J$ tali che $y_1 < \bar y < y_2$. Siano $x_i = g(y_i)$ $(i = 1, 2)$. Poiché f è strettamente crescente e continua $f([x_1, x_2]) = [y_1, y_2]$ e per la Proposizione 7 g è continua su (y_1, y_2) ed in particolare è continua in $\bar y$.
Supponiamo ora che $\bar y$ sia un estremo di J; allora o $\bar y = \max J$ oppure $\bar y = \min J$. Nel primo caso possiamo prendere $y_1 \in J$ con $y_1 < \bar y$ e, se $f(\bar x) = \bar y$ e $f(x_1) = y_1$, sarà (per la stretta crescenza di f) $f([x_1, \bar x]) = [y_1, \bar y]$ e (sempre per la Proposizione 7) g sarà continua in $\bar y$. Il caso $\bar y = \min J$ è del tutto analogo. ∎

Funzioni uniformemente continue

Definizione 10 *Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua su E se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ , \quad \exists\ \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ x, y \in E\ ,\ |x - y| < \delta\ . \tag{3}$$

Si noti la differenza con la definizione di continuità in (1): per funzioni solo continue il δ dipende sia da ε che da y (ossia $\delta = \delta(\varepsilon, y)$), mentre per funzione uniformemente continue il δ dipende solo da ε ed è *uniforme* in y (ossia non vi dipende): $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Ad esempio è facile vedere che $f(x) = 1/x$ è continua su $A = (0, 1)$ ma non uniformemente continua, mentre la funzione $f(x) = x$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

In generale è facile costruire esempi di funzioni uniformemente continue come mostra la seguente

Proposizione 11 *Sia $f \in C(E)$ con E compatto. Allora, f è uniformemente continua su E.*

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che f non sia uniformemente continua su E. Allora, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$ esisterebbero x e $y \in E$ con $|x - y| < \delta$ ma $|f(x) - f(y)| \geq \delta$. Quindi, scegliendo $\delta = 1/n$, si potrebbero trovare x_n e $y_n \in E$ con $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Poichè E è compatto, esisterebbe una sottosuccesione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un $\bar x \in E$. Ma, siccome $|x_n - y_n| \to 0$, ne seguirebbe che anche $y_{n_k} \to \bar x$. Allora, avremmo un assurdo:

$$0 = |f(\bar x) - f(\bar x)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0\ . \quad ∎$$

Definizione 12 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq E \subseteq B$. La restrizione di f ad A è la funzione*

$$f|_A : A \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad f|_A(x) = f(x)\ ,\ \forall\ x \in A\ . \tag{4}$$

Una estensione $\tilde f$ di f su B è una funzione $\tilde f : B \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde f|_E = f$.

Ovviamente la restrizione di una funzione continua è sempre continua. Più interessante è la questione inversa: quando una funzione continua può estendersi con continuità ad un insieme più grande del suo dominio? Una risposta è data dalla Proposizione 15 qui sotto. Prima, alcuni risultati preliminari.

[5] J è un intervallo (Proposizione 6).

Lemma 13 *Sia f uniformemente continua su E e $\{x_n\} \subseteq E$ una successione di Cauchy. Allora, $\{f(x_n\}$ è di Cauchy.*

Dimostrazione Siano ε e δ come in (3) e sia N tale che $|x_n - x_m| < \delta$ per ogni $n, m \geq N$. Da (3) segue allora che $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$. ∎

Proposizione 14 *Sia f uniformemente continua su E e $y \in \mathcal{D}E$. Allora esiste finito il $\lim\limits_{x \to y} f(x)$.*

Dimostrazione Siano $x_n \in E$ tali che $\lim x_n = y$. Dal Lemma 13 segue se $\{x_n\}$ è una qualunque successione convergente a y, $\{f(x_n\}$ è di Cauchy e quindi convergente. Siano $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ due tali successioni e siano $L = \lim f(x_n) \in \mathbb{R}$ e $L' = \lim f(x'_n)$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia δ come in (10). Poichè $\lim(x_n - x'_n) = 0$, esiste N tale che $|x_n - x'_n| < \delta$ per ogni $n \geq N$ e, per (10), $|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon$; prendendo il limite in tale relazione otteniamo $|L - L'| \leq \varepsilon$, che, per l'arbitrarietà di ε, implica che $L = L'$. Quindi il limite $\lim f(x_n)$ non dipende dalla particolare successione scelta: questo equivale a dire che esiste finito il $\lim\limits_{x \to y} f(x)$. ∎

Proposizione 15 *Sia f uniformemente continua su E. Allora esiste un'unica estensione continua $\tilde{f}$ a $\overline{E}$.*

Dimostrazione Si ricordi che $\overline{E} = E \cup \mathcal{D}E$. L'estensione $\tilde{f}$ è definita ponendo $\tilde{f}(y) = \lim_{x \to y} f(x)$ per ogni $y \in \mathcal{D}E$: dalla Proposizione 14 segue che $\tilde{f}$ è ben definita e, per costruzione, è continua su $\overline{E}$. L'unicità è ovvia. ∎

Corollario 16 *Sia f uniformemente continua su E con E limitato. Allora f è limitata.*

Dimostrazione $\overline{E}$ è compatto e se $\tilde{f}$ denota l'estensione continua di f a $\overline{E}$ (Proposizione 15), dal Teorema di Weierstrass, segue che $\min\limits_{\overline{E}} \tilde{f} \leq f \leq \max\limits_{\overline{E}} \tilde{f}$. ∎