

Complemento 9

Numerabilità e \mathbb{R}

Definizione 1 (i) Due insiemi A e B si dicono equipotenti o che hanno la stessa cardinalità se esiste una biiezione¹ $\phi : A \rightarrow B$.

(ii) Un insieme F è finito se è equipotente con l'insieme $\{1, \dots, n\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$; in tal caso diremo che la cardinalità di F è n o che n è il numero di elementi di F .

(iii) Un insieme A si dice numerabile se ha la cardinalità di \mathbb{N} .

Osservazione 2 (i) A è numerabile se e solo se $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $a_n \neq a_m$ per ogni $n \neq m$; la successione $\{a_n\}$ si chiama una numerazione di A .

(ii) \mathbb{Z} è numerabile poiché $\mathbb{Z} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $a_1 = 0$, $a_{2n} = n$ e $a_{2n+1} = -n$.

(iii) Essere equipotenti è chiaramente una relazione d'equivalenza (esercizio).

Proposizione 3 Siano F_n insiemi finiti con $F_n \cap F_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$. Allora $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ è numerabile.

Dimostrazione Per ogni k sia $n_k \in \mathbb{N}$ il numero di elementi di F_k . Chiamiamo a_1, \dots, a_{n_1} gli elementi (tutti distinti) di F_1 ; chiamiamo poi $a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}$ gli elementi di F_2 (distinti tra loro e dagli elementi di F_1 per ipotesi), e così via ricorsivamente. Chiaramente $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A$. ■

Chiaramente, in generale, l'unione di insiemi finiti è al più numerabile (ossia o è finita o è numerabile).

Proposizione 4 Siano A_1, \dots, A_n insiemi numerabili. Allora $A_1 \times \dots \times A_n$ è numerabile.

Dimostrazione Per induzione su n . Il caso $n = 1$ è ovviamente vero. Supponiamo dunque che per $n \geq 2$, $A = A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ sia numerabile e facciamo vedere che $A \times B$ con $B = A_n$ è numerabile. Sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$; sia poi $F_n := \{(a_k, b_m) : k + m = n + 1\}$. Chiaramente gli F_n sono insiemi finiti a due a due disgiunti e $A \times B = \bigcup_n F_n$. Dunque la tesi segue dalla Proposizione 3. ■

Proposizione 5 Siano A_n numerabili. Allora $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è numerabile.

Dimostrazione Supponiamo per semplicità che $A_n \cap A_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$. Per definizione di numerabilità, per ogni n , abbiamo che $A_n = \{a_k^{(n)} : k \in \mathbb{N}\}$. Dunque la funzione $\phi : (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow a_k^{(n)} \in A$ è una biiezione tra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e A e quindi l'asserto segue dalla Proposizione 4. ■

Teorema 6 \mathbb{Q} è numerabile.

Dimostrazione Dalla Proposizione 4 segue che $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Sia, dunque, $\{(p_n, q_n) : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ e sia $\phi : (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow p_n/q_n \in \mathbb{Q}$. Chiaramente, ϕ è suriettiva ma non iniettiva. Sia $n_1 = 1$ e $r_1 := \phi(p_1, q_1)$; sia, poi, $n_2 = \min\{n : \phi(p_n, q_n) \neq r_1\}$ (chiaramente tale insieme è non vuoto poiché ϕ è suriettiva) e $r_2 := \phi(p_{n_2}, q_{n_2})$; e induttivamente $n_{j+1} = \min\{n : \phi(p_n, q_n) \neq r_k, \forall k \leq j\}$ e $r_{j+1} := \phi(p_{n_{j+1}}, q_{n_{j+1}})$. Per costruzione, se $n_{j+1} > n_j + 1$, $\phi(p_i, q_i) = \phi(p_j, q_j)$ per ogni $n_j \leq i \leq n_{j+1} - 1$ e, in ogni caso, $r_j = \phi(p_{n_j}, q_{n_j}) \neq \phi(p_{n_{j+1}}, q_{n_{j+1}}) = r_{j+1}$. In conclusione, $\{r_j : j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$. ■

¹Una biiezione tra due insiemi A e B è una funzione $\phi : A \rightarrow B$ iniettiva ($\phi(x) = \phi(y) \implies x = y$) e suriettiva ($\forall y \in B, \exists x \in A$ t.c. $\phi(x) = y$).

Teorema 7 \mathbb{R} non è numerabile.

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che \mathbb{R} sia numerabile; lo sarebbe, allora, anche $I_0 := [0, 1]$. Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numerazione di I_0 . Costruiamo ora, ricorsivamente, una successione di intervalli chiusi I_n di lunghezza 3^{-n} tali che $I_n \subseteq I_{n+1}$ e tali che $a_n \notin I_n$. Dividiamo I_0 in tre intervalli della stessa lunghezza, $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ e $[2/3, 1]$ e sia I_1 uno di tali intervalli che non contiene² a_1 ; dividiamo, poi, I_1 in tre intervalli chiusi della stessa lunghezza e chiamiamo I_2 uno di questi intervalli che non contiene a_2 e così via. Tali intervalli I_n hanno le proprietà richieste. Sia $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$. Si ha che $\alpha_n \leq \alpha_{n+1} < \beta_k \leq \beta_{k+1}$ per ogni n e k ; quindi le successioni α_n e β_n sono successioni monotone e poiché $\beta_n - \alpha_n = 3^{-n}$ hanno lo stesso limite $\alpha \in [0, 1]$. Ma per costruzione $\alpha \in \bigcap I_n$ e quindi è diverso da tutti gli a_n che contraddice il fatto che gli elementi della successione $\{a_n\}$ sono tutti i numeri reali in $[0, 1]$. ■

Definizione 8 $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle successioni $\sigma = \{\sigma_n\}$ a valori in $\{0, 1\}$ (ossia σ_n è 0 o 1 per ogni n).

Osservazione 9 $2^{\mathbb{N}}$ si identifica naturalmente con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'insieme delle parti (ossia di tutti i sottoinsiemi) di \mathbb{N} tramite la biiezione $\phi : A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \sigma = \phi(A)$ con $\sigma_n = 1$ se e solo se $n \in A$.

Lemma 10 Siano A e B sottoinsiemi numerabili e disgiunti di un insieme X . Allora X e $X \setminus A$ sono equipotenti.

Dimostrazione Sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ e sia $C = A \cup B$. Definiamo $\phi : X \rightarrow X \setminus A$ come segue: $\phi(x) = x$ se $x \in X \setminus C$; $\phi(a_n) = b_{2n}$ e $\phi(b_n) = b_{2n-1}$. Chiaramente ϕ è una biiezione tra X e $X \setminus A$. ■

Teorema 11 \mathbb{R} ha la cardinalità di $2^{\mathbb{N}}$.

Dimostrazione Dividiamo la dimostrazione in tre passi.

1. Sia A il sottoinsieme di $2^{\mathbb{N}}$ formato dalla successione nulla $\sigma^0 := 0$ ($\sigma_k^0 = 0, \forall k$) e da tutte le successioni definitivamente uguali a³ 1. Si noti che A è numerabile⁴. Sia $X := 2^{\mathbb{N}} \setminus A$, e definiamo la seguente funzione

$$\phi : \sigma \in X \rightarrow \phi(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2^k} \in (0, 1);$$

si noti che ϕ è ben definita su tutto $2^{\mathbb{N}}$ e che $\phi(\sigma) = 0$ se e solo se $\sigma = \sigma^0$ e che $\phi(\sigma) = 1$ se e solo se $\sigma_k = 1$ per ogni k (e che tale successione è un elemento di A). Siano $\sigma \neq \sigma'$ elementi di X ; sia $m = \min\{n : \sigma_n \neq \sigma'_n\}$ (si noti che tale insieme non è vuoto poiché $\sigma \neq \sigma'$). Per un tale m si ha che $\sigma_m = 0$ e $\sigma'_m = 1$ o viceversa. Senza perdita di generalità supponiamo che $\sigma_m = 0, \sigma'_m = 1$ e che se $m > 1$ allora $\sigma_k = \sigma'_k$ per ogni $k \leq m-1$ e, in tal caso, poniamo $r_{m-1} := \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sigma_k}{2^k}$ mentre se $m = 1$ poniamo $r_0 := 0$. Poiché $\sigma_m = 0, \sigma'_m = 1$ e $\sigma \notin A$ (e quindi non è definitivamente uguale a 1)

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) &= r_{m-1} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2^k} \\ &< r_{m-1} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= r_{m-1} + \frac{1}{2^m} = r_{m-1} + \frac{\sigma'_m}{2^m} \leq r_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sigma'_k}{2^k} \\ &= \phi(\sigma') \end{aligned}$$

²Gli intervalli che non contengono a_1 potrebbero essere due se $a_1 \neq 1/3, 2/3$ ma se $a_1 = 1/3$ o $a_1 = 2/3$ chiaramente ce ne è uno solo.

³ σ è definitivamente uguale ad 1 se esiste n tale che $\sigma_k = 1 \forall k \geq n$.

⁴ $F_n := \{\sigma \in 2^{\mathbb{N}} : \sigma_{n-1} = 0 \text{ e } \sigma_k = 1 \forall k \geq n\}$ è finito e $A = \{\sigma^0\} \cup \bigcup_{n \geq 1} F_n$.

e quindi ϕ è iniettiva.

Sia $x \in (0, 1)$ e definiamo, iterativamente, la seguente successione σ . Per $n = 1$, poniamo

$$\sigma_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$

e si noti che

$$r_1 := \frac{\sigma_1}{2} \leq x < r_1 + \frac{1}{2} \leq 1.$$

Supponiamo ora che $n \geq 1$ e che $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ siano tali che

$$r_n := \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{2^k} \leq x < r_n + \frac{1}{2^n} \leq 1 \quad (1)$$

e definiamo

$$\sigma_{n+1} := \begin{cases} 0, & \text{se } r_n \leq x < r_n + \frac{1}{2^{n+1}}, \\ 1, & \text{se } r_n + \frac{1}{2^{n+1}} \leq x < r_n + \frac{1}{2^n}. \end{cases} \quad (2)$$

Da tale definizione segue che (1) vale con $n + 1$ al posto di n (e dunque, per induzione, vale per ogni $n \in \mathbb{N}$). Per tale sequenza σ si ha che $\lim r_n = \phi(\sigma)$ e da (1) segue che $x = \phi(x)$. Quindi ϕ è suriettiva. Abbiamo dimostrato che X e $(0, 1)$ sono equipotenti.

2. $(0, 1)$ è equipotente a \mathbb{R} : ad esempio $x \rightarrow \phi(x) = \cotan \pi x$ è una biiezione tra $(0, 1)$ e \mathbb{R} . Quindi X è equipotente a \mathbb{R} .

3. Sia $B := \{\sigma^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ dove $\sigma^{(k)}$ è la successione con $\sigma_j^{(k)} = 1$ se $j \leq k$ e $\sigma_j^{(k)} = 0$ se $j \geq k + 1$. Chiaramente $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \subset 2^{\mathbb{N}}$. Dunque per il Lemma 10 segue che $2^{\mathbb{N}}$ e X sono equipotenti. Per transitività segue la tesi del teorema. ■

Esercizio. Dimostrare che un insieme A è infinito (non è finito) se e solo se esiste una funzione $\phi : A \rightarrow A$ iniettiva ma non suriettiva.