Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Stime

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

A cura di: Daniele Dimonte

Stime

1. $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbf{R}$

   $|\sin x| = |\int_0^x \cos t dt| \leq \int_0^{|x|} |\cos t| dt \leq \int_0^{|x|} dt = |x|$.

2. $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2} \forall x \in \mathbf{R}$

   $|\cos x - 1| \leq |\int_0^x -\sin t dt| \leq \int_0^{|x|} |\sin t| dt \leq \int_0^{|x|} t dt = \frac{x^2}{2}$.

3. $|\tan x| \leq 2|x|$ se $|x| \leq 1$

   Notiamo innanzitutto che se $|x| \leq 1$ si ha $|\cos x| \geq \cos 1 \geq \cos \frac{\pi}{3}$, dunque $|\tan x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} \leq \frac{|x|}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2|x|$.

4. $|\arctan x| \leq |x| \forall x \in \mathbf{R}$

   $|\arctan x| = |\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt| \leq \int_0^{|x|} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^{|x|} dt = |x|$.

5. $|e^x - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$

   Se $|x| \leq 1$ si ha $|e^x - 1| = |\int_0^x e^t dt| \leq \int_0^{|x|} e^{|x|} dt \leq \int_0^{|x|} e dt = e|x| \leq 3|x|$.

6. $|\sinh x| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$

   Se $|x| \leq 1$ possiamo applicare la stima appena vista, e dunque $|\sinh x| = \left| \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right| = \left| \frac{(e^x-1)-(e^{-x}-1)}{2} \right| \leq \frac{|e^x-1|+|e^{-x}-1|}{2} \leq \frac{3|x|+3|x|}{2} = 3|x|$.

7. $|\cosh x - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$

   Analogamente a quanto fatto per il seno iperbolico, se $|x| \leq 1$ si ha $|\cosh -1| = \left| \frac{(e^x-1)+(e^{-x}-1)}{2} \right| \leq \frac{|e^x-1|+|e^{-x}-1|}{2} \leq \frac{3|x|+3|x|}{2} = 3|x|$.

8. $|\log(x+1)| \leq 2|x|$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$

   Se $|x| \leq \frac{1}{2}$ si ha che $|\log(x+1)| \leq \left| \int_0^x \frac{dt}{1+t} \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{dt}{1-\frac{1}{2}} = 2|x|$.