Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

15 Maggio 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATO 11

1. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ con:
   $\omega = xydx + (y^2+1)dy$
   e $\gamma(t)$ è l'arco di parabola $x = y^2$ di estremi $(0,0)$ e $(1,1)$
   Soluzione:
   Calcoliamo per prima cosa $\gamma(t) = (t^2, t)$ $\gamma'(t) = (2t, 1)$ e abbiamo:
   $$\int_\gamma \omega = \int_0^1 < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) >= \int_0^1 [2t^4 + (t^2+1)]dt = \frac{26}{15}$$

2. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ con:
   $\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$ e
   $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
   Soluzione:
   Calcoliamo per prima cosa
   $$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 3)$$
   e abbiamo:
   $$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) >=$$
   $$= \int_0^{2\pi} [(2\sin t + 3t)(-2\sin t) + (2\cos t + 3t)2\sin t + (2\cos t + 2\sin t)3]dt =$$
   $$= \int_0^{2\pi} [-4\sin^2 t - 6t\sin t + 4\sin t\cos t + 6t\sin t + 6\cos t + 6\sin t]dt =$$
   $$\int_0^{2\pi} [-4\sin^2 t + 4\sin t\cos t + 6\cos t + 6\sin t]dt = -4\pi$$

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ con:
   $\omega = xydx + (y^2+1)dy$
   e $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$ $t \in [0, \pi]$
   Soluzione:
   Calcoliamo per prima cosa $\gamma'(t) = (\cos t, -\sin t)$ e abbiamo:
   $$\int_\gamma \omega = \int_0^\pi < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) >= \int_0^\pi \sin t\cos^2 t - \sin t(1 + \cos^2 t)dt = -2$$

4. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ con:
$\omega = x^2dx + xy^2dy$
e $\gamma(t) = (e^t, t) \;\; t \in [0, \pi]$
Soluzione:
Calcoliamo per prima cosa $\gamma'(t) = (e^t, 1)$ e abbiamo:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^\pi < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) >= \int_0^\pi [e^{3t}+t^2e^t]dt = ... = \frac{e^{3\pi}}{3} - \frac{1}{3} + e^\pi\pi^2 - 2\pi e^\pi + 2e^\pi - 2$$

5. Calcolare il flusso del campo vettoriale:

$$F(x, y, z) = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{3y}{x^2+y^2}, 1)$$

attraverso la superficie S che ha rappresentazione parametrica

$$\phi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u^2) \qquad u \in [0, \frac{1}{2}] \;\; v \in [0, 2\pi]$$

orientata in modo che il versore normale punti verso il basso.
Soluzione:
Osserviamo che denotate con x, y, z le componenti du ϕ si ha che

$$z(u, v) = x^2(u, v) + y^2(u, v)$$

infatti S è la porzione del paraboliode $z = x^2 + y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = \frac{1}{4}$. Per calcolare il flusso di F attraverso questa superficie non si può applicare il teorema della divergenza poichè il volume che ha come bordo S non è un aperto. É infatti l'unione dell'aperto $\{x^2+y^2 < z, 0 < z < \frac{1}{4}\}$ con il coperchio del paraboloide $\{x^2 + y^2 = z, z = \frac{1}{4}\}$. Quindi calcoliamo il flusso direttamente. Determiniamo il vettore normale alla superficie:

$$\overline{n} = -\frac{1}{||\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}||}(\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}) = \frac{1}{\sqrt{4u^4+u^2}}(2u^2\cos u, 2u^2\sin v, -u)$$

Notare che essendo $-u \leq 0$ si ha che la normale punta verso il basso.
Quindi:

$$\int_S < \overline{F}, \overline{n} > dS = \int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0^{2\pi} dv(4u\cos^2 v) + 6u\sin^2 v - u = ... = \pi$$

6. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y, x, z^3)$$

attraverso la superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio 2.
Soluzione:
Applichiamo il teorema della divergenza

$$\int_S < \overline{F}, \overline{n} > dS = \int_V div\overline{F}\; dxdydz$$

Dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. Si calcola

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3z^2$$

Quindi

$$\int_S < \overline{F}, \overline{n} > dS = \int_V div\overline{F}\; dxdydz = \int_V 3z^2\; dxdydz =$$

Passando a coordiante sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \quad J = \rho^2\sin\phi$$

$$= \int_V 3z^2\; dxdydz = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi 3\rho^4 \sin\phi\cos^2\phi = (2\pi)[3\frac{\rho^5}{5}]_0^2[-\frac{\cos^3\phi}{3}]_0^{\pi} = \frac{128}{5}\pi$$

7. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,y,z^4)$$

attraverso la superficie del cilindro di equazione $x^2+y^2 = 4$ delimitato dai piani $z = -1$ e $z = 1$
Soluzione:
Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\int_S < \overline{F}, \overline{n} > dS = \int_V div\overline{F}\; dxdydz$$

Dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4,\;\; z \in (-1,1)\}$ che notiamo essere un dominio normale rispetto all'asse z.
Essendo

$$div(\overline{F}) = 2 + 4z^3$$

Passando a coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad J = \rho$$

$$\int_V (2+4z^3) dxdydz = \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho\rho(2+4z^3) = 16\pi$$

8. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}dx + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}dy$$

Dire se ω è esatta e in caso affermatico determinarne una primitiva.
Soluzione:
Poniamo $\omega = f_1 dx + f_2 dy$ con :

$$f_1(x,y) = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2} \quad f_2 = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}$$

Essendo f_1 e f_2 di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, si ha anche ω è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2}$$

Ne segue che ω è esatta. Determiniamo ora una primitiva f di ω. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1 = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2 = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} \tag{2}$$

Integrando 1 rispetto a x si ottiene:

$$f(x,y) = \int \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}dx = \log(1+x^2y^2) + c(y)$$

dove c è una funzione della sola variabile y. Sostituendo in 2 si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} + c'(y) = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}$$

Quindi $c'(y) = 0$ cioè $c(y) = c$. Si ha $f(x,y) = \log(1+x^2y^2) + c$.

9. Calcolare il seguente integrale tramite il teorema di Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} (z^2+y)dx + zdy + ydz$$

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1, y = z\}$ con $\partial\Sigma$ orientato positivamente.
Soluzione:
Sia $\omega = (z^2+y)dx + zdy + ydz$ e $F = (z^2+y, z, y)$, per il teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma < rotF, n > dxdydz$$

dove n è il versore normale uscente da Σ. La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ con $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ dove
$K = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$. É quindi la parte di paraboliode di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ al di sopra del piano $z = 0$. Si ha che la parametrizzazione di Σ è

$$\Phi = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$$

Quindi andiamo a calcolare il versore normale e il $rotF$:

$$n = \frac{1}{||\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y}||} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x, 2y, 1)$$

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + y & z & y \end{vmatrix} = (0, 2z, -1)$$

Quindi:

$$\int_\Sigma < rotF, n > dxdydz = \int_K \frac{[4y(1 - x^2 - y^2) - 1]}{||\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y}||} ||\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y}||dxdy =$$

Passando in coordianate polari:

$$= \int_0^{2\pi} (\int_0^1 [4\rho(1 - \rho^2) \sin\theta - 1]\rho d\rho)d\theta = -\pi$$

.