**Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM220

**27 Febbraio 2012**

**A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia**

**Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia**

Tutorato 2

1. Esercizio 6.40

   Sia $X_T$ lo spazio di Banach delle funzioni continue su $[-T,T]$ con norma uniforme $\|u\|_\infty \equiv \sup_{|t|\le T}|u(t)|$ e sia $\Phi_a : X_T \to X_T$ definita come

   $$(\Phi_a u)(t) \equiv a + t^2 + \int_0^t \sin u(s)ds$$

   trovare $T>0$ tale che $\Phi_a$ sia una contrazione da $X_T$ in se stesso.

   *Soluzione*: $\Phi_a$ è contrazione se $\exists k<1$ tale che

   $$\|\Phi_a(u)-\Phi_a(v)\| \le k\|u-v\|$$

   Cerchiamo dunque un $T$ così fatto. Si ha che

   $$\|\Phi_a(u)-\Phi_a(v)\| \le \sup_{|t|\le T}|\int_0^t(\sin u(s)-\sin v(s))ds| \le \sup_{|t|\le T}\int_0^{|t|}|\sin u(s)-\sin v(s)|ds \le$$

   $$\le \sup_{|t|\le T}\int_0^{|t|}|\int_{v(s)}^{u(s)}\cos l dl|ds \le (\sup_{|t|\le T}|t|)\|u-v\| \le T\|u-v\|$$

   Quindi per avere una buona costante per la contrazione vogliamo che sia $T<1$. Inoltre, se $T=1$, siano $u(t)\equiv 1$ e $v(t)\equiv 0$, si ha che

   $$\|\Phi(u)-\Phi(v)\| = T \ge \|u-v\| = 1$$

2. Esercizio 6.41

   Sia $0<\varepsilon$ e sia $X_\varepsilon \equiv \{u \in C([-1,1],\mathbf{R}) : \sup_{|t|\le 1}|u(t)| \le \varepsilon\}$ e sia $\Phi(u) \equiv u^3+\cos u - 1$.

   **(i)** Trovare $\varepsilon_0>0$ tale che $\Phi$ sia una contrazione su $X_\varepsilon$.

   **(ii)** Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\Phi\circ\cdots\circ\Phi}_{n}\left(\frac{t^2+t^3}{100}\right)$.

   *Soluzione*:

   **(i)** Per verificare che $\Phi$ è una contrazione, occorre studiare $\|\Phi(u)-\Phi(v)\|$; studiamo dunque

   $$|u^3+\cos u-1-v^3-\cos v+1| \le |u-v||u^2+uv+v^2|+|\cos u-\cos v| \le$$

   $$\le (3\varepsilon^2+\sup\{|\sin u|,|\sin v|\})|u-v|$$

Quindi, passando alle norme

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \le (3\varepsilon^2 + \sin\varepsilon)\|u - v\|$$

Avendo preso come sup $\sin\varepsilon$ e non 1 poiché altrimenti si avrebbe $1 + 3\varepsilon^2 > 1\ \forall\varepsilon$. Se dunque ora $3\varepsilon^2 + \sin\varepsilon < 1$ ha soluzioni, allora abbiamo trovato il nostro $\varepsilon_0$. Ma allora, ricordandoci che $3\varepsilon^2 + \sin\varepsilon$ è monotona crescente e che vale 0 in 0, si ha che $\varepsilon_0 = \sup\{0 < 3\varepsilon^2 + \sin\varepsilon < 1\}$.

**(ii)** Per prima cosa osservo che la funzione $\frac{t^2+t^3}{100}$ è nello spazio $X_{\varepsilon_0}$ , infatti

$$\sup_{|t|\le 1} |\frac{t^2+t^3}{100}| = \frac{2}{100}$$

E si ha che

$$3\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \sin\frac{2}{100} < 0.03 < 1$$

Dunque è in $X_{\varepsilon_0}$. Ricordando la dimostrazione del teorema del punto fisso considero la successione in $X_{\varepsilon_0}$ così definita:

$$v_0 = \frac{t^2+t^3}{100}$$

$$v_n = \Phi^n(v_0)$$

La successione é di Cauchy e inoltre converge al punto fisso di $\Phi$ dunque:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\Phi\circ\cdots\circ\Phi}_{n}\left(\frac{t^2+t^3}{100}\right) = \bar{u}$$

con $\bar{u}$ punto fisso della contrazione $\Phi$ . Dobbiamo ora cercare una funzione $\bar{u}$ che soddisfi $\Phi(\bar{u}) = \bar{u}$ cioè :

$$\bar{u}^3 + cos\bar{u} - 1 = \bar{u}$$

Notiamo che la funzione $\bar{u} \equiv 0$ soddisfa le nostre richieste e dunque poiché il punto fisso di una contrazione è unico ho trovato la soluzione che cercavo, quindi: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\Phi\circ\cdots\circ\Phi}_{n}\left(\frac{t^2+t^3}{100}\right) = 0$

3. Esercizio 6.43

Sia $X$ uno spazio di Banach e sia $x : t \in [a,b] \to x(t) \in X$ una funzione continua.

**(i)** Si dimostri che $x^{(k)} \equiv \sum_{j=0}^{k} \delta_k x(t_j^{(k)})$, con $t_j^{(k)} \equiv a+j\delta_k$ e $\delta_k \equiv (b-a)/k$, è una successione di Cauchy in $X$.

Si definisca $\int_a^b x(t)dt \equiv \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$.

**(ii)** Si dimostri la linearità dell'integrale e che

$$\|\int_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt.$$

*Soluzione*:

**(i)** Per prima cosa osserviamo che $\delta_k$ e $t_j^{(k)}$ sono successione di Cauchy in $[a;b]$. Quindi abbiamo che:

$$\|\delta_m - \delta_n\| \leq \varepsilon \quad \forall\, m,n \geq N$$

E dalla continuità di $x(t)$ e dal fatto che $t_j^{(k)}$ è di Cauchy si ha che è di Cauchy anche $x(t_j^{(k)})$ e che:

$$\|x(t_j^{(m)}) - x(t_j^{(n)})\| \leq \varepsilon \quad \forall\, m,n \geq N'$$

Passando ora a $x^{(k)}$ proviamo che anch'essa è di Cauchy, siano $m \geq n \geq \max\{N, N'\}$:

$$\|x^{(m)} - x^{(n)}\| = \|\sum_{j=0}^{m} \delta_m x(t_j^{(m)}) - \sum_{j=0}^{n} \delta_n x(t_j^{(n)})\| = \|\sum_{j=n+1}^{m} \delta_m x(t_j^{(m)}) - \delta_n x(t_j^{(n)})\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{m} \Big(\|\delta_m x(t_j^{(m)}) - \delta_n x(t_j^{(m)})\| + \|\delta_n x(t_j^{(m)}) - \delta_n x(t_j^{(n)})\|\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{m} \Big(\|\delta_m - \delta_n\|\|x(t_j^{(m)})\| + \|x(t_j^{(m)}) - x(t_j^{(n)})\|\|\delta_n\|\Big) <$$

$$< \varepsilon \left( \sum_{j=n+1}^{m} \Big(\|x(t_j^{(m)})\| + \|\delta_n\|\Big) \right)$$

**(ii)** La linearità discende direttamente dalla linearità delle sommatorie e dei limiti.
Vediamo innanzitutto che se $a_k$ è successione convergente ad $a$ si ha che

$$\|\lim_{k\to\infty} a_k\| = \lim_{k\to\infty} \|a_k\|$$

E dunque si ha che

$$\|\int_a^b x(t)dt\| = \|\lim_{k\to\infty} x^{(k)}\| = \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}\| = \lim_{k\to\infty} \|\sum_{j=0}^{k} \delta_k x(t_j^{(k)})\| \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \delta_k \|x(t_j^{(k)})\| = \int_a^b \|x(t)\|dt$$

4. Esercizio 7.3

Sia $f(x,y) \equiv \big(\sin(x-y^2), x^4 + \tan y\big)$. Si enunci il teorema della funzione inversa, si dimostri che $f$ è invertibile in un intorno di (0,0) e si trovi una sfera su cui è definita la funzione inversa.

*Soluzione*: Perché $f$ sia invertibile si deve avere che $\nabla f(0,0)$ sia invertibile. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y^2) & 4x^3 \\ -2y\cos(x-y^2) & 1+\tan^2 y \end{pmatrix}, \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è banalmente invertibile.
Per trovare la sfera dobbiamo studiare

$$\sup_{|(x,y)-(0,0)|<\rho} \|I - T\nabla f\| \leq \frac{1}{2}, \qquad T = (\nabla f(0,0))^{-1}$$

$$\sup_{|(x,y)|<\rho} \left\| \begin{pmatrix} 1-\cos(x-y^2) & -4x^3 \\ 2y\cos(x-y^2) & -\tan^2 y \end{pmatrix} \right\|$$

Si ha una stima comune sulla norma matriciale che è la seguente: $\|A\| \leq \sqrt{nm}\|A\|_{max}$, dove $\|\cdot\|_{max}$ è il massimo dei moduli degli elementi di A, quindi basta studiare il modulo di cisacuno degli elementi e usare poi la stima su $\rho$ più precisa:

$$|1-\cos(x-y^2)| \leq \frac{(x-y^2)^2}{2} = \frac{x^2-2xy^2+y^4}{2} \leq \frac{4\rho}{2} \leq \frac{1}{4},\ \rho \leq \frac{1}{8}$$

$$|2y\cos(x-y^2)| \leq |2y| \leq 2\rho \leq \frac{1}{4},\ \rho \leq \frac{1}{8}$$

$$|-4x^3| \leq 4\rho^3 \leq \frac{1}{4},\ \rho \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$|-\tan^2 y| \leq 4y^2 \leq 4\rho^2 \leq \frac{1}{4},\ \rho \leq \frac{1}{4}$$

Quindi la stima complessiva che otteniamo è $\rho \leq \frac{1}{8}$, e dunque in una sfera di raggio $\frac{1}{8}$ la funzione è invertibile.

5. Esercizio 7.6

   **(i)** Sia $F(x,y) = y^2 + x^2 - 1$, con $y \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ e si fissi $(y_0, x_0) = (1,0)$. Si trovino $\rho$ ed $r$ tali che (7.6) e (7.7) valgano.

   **(ii)** Si dimostri che il valore $r = (1/\sqrt{2})$ è il valore massimo che si può ottenere anche se si usano (7.8) e (7.9) facendo variare $\alpha \in (0,1)$.

   *Soluzione*:

   **(i)**

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,x) = 2y,\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2$$

   che è invertibile.

$$\sup_{|x|\leq r} |F(y_0,x)| = \sup_{|x|\leq r} |x^2| \leq r^2 \leq \frac{\rho}{2\cdot\frac{1}{2}} = \rho$$

$$\sup_{|x|\leq r, |y-1|\leq\rho} |1 - \frac{1}{2}\cdot 2y| = \sup_{|x|\leq r, |y-1|\leq\rho} |1-y| \leq \rho \leq \frac{1}{2}$$

   da cui

$$\begin{cases} r \leq \sqrt{\rho} \\ \rho \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**(ii)** Analogamente a sopra si ha che

$$\begin{cases} r \leq \sqrt{\alpha\,\rho} \\ \rho \leq 1-\alpha \end{cases}$$

da cui studiando la stima massimale su $r$ data da $r \leq \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ si ha la tesi.

6. Esercizio 7.7

Sia $F : (\vec{y}, x) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to F(\vec{y}, x) \in \mathbf{R}^2$ definita come

$$F_1(y_1, y_2, x) = \sin x + e^x y_1 + x \sin(y_1 y_2),$$

$$F_2(y_1, y_2, x) = 3|x| + y_2 + y_1^4,$$

e sia $(\vec{y_0}, x_0) \equiv (y_{01}, y_{02}, x_0) = (0, 0, 0)$. Si dica se il Teorema 7.1 è applicabile in un intorno di $(\vec{y_0}, x_0)$ e se sì si trovino dei valori di $\rho$ e $r$ per cui (7.6) e (7.7) vengano soddisfatte.

*Soluzione*: F è continua, ed inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{y}, x) = \begin{pmatrix} e^x + xy_2\cos(y_1y_2) & xy_2\cos(y_1y_2) \\ 4y_1^3 & 1 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è invertibile.

$$\sup_{|x|\leq r} \|F(\vec{y_0}, x)\| = \sup_{|x|\leq r} \left\| \begin{pmatrix} \sin x \\ 3|x| \end{pmatrix} \right\| = \sup_{|x|\leq r} \sqrt{\sin^2 x + 9x^2} \leq \sqrt{10}r \leq \frac{\rho}{2},$$

$$r \leq \frac{\rho}{2\sqrt{10}}$$

$$\sup_{|x|\leq r, \|(y_1,y_2)\|\leq\rho} \left\| \begin{pmatrix} 1 - e^x - xy_2\cos(y_1y_2) & -xy_2\cos(y_1y_2) \\ -4y_1^3 & 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{1}{2}$$

Con un ragionamento analogo a quello fatto sopra, si ha:

$$|1-e^x-xy_2\cos(y_1y_2)| \leq |1-e^x|+|xy_2\cos(y_1y_2)| \leq 3|x|+|xy_2| \leq r(3+\rho) \leq$$

$$\leq \frac{\rho(3+\rho)}{2\sqrt{10}} \leq \frac{4\rho}{2\sqrt{10}} \leq \frac{1}{4}, \ \rho \leq \frac{\sqrt{10}}{8}$$

$$|-xy_2\cos(y_1y_2)| \leq |xy_2| \leq r\rho \leq \frac{\rho^2}{2\sqrt{10}} \leq \frac{1}{4}, \ \rho \leq \sqrt{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

$$|4y_1^3| \leq 4\rho^3 \leq \frac{1}{4}, \ \rho \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

Da cui

$$\begin{cases} r \leq \frac{\rho}{2\sqrt{10}} \\ \rho \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

7. Esercizio 7.8

Si consideri la funzione $f : \vec{y} \in \mathbf{R}^2 \to f(\vec{y}) = (f_1(y), f_2(y)) \in \mathbf{R}^2$ definita come

$$f_1(\vec{y}) = y_1 + y_1^2 \cos y_2, \qquad f_2(\vec{y}) = y_2 + y_1^2.$$

Si dica se la funzione $f$ è invertibile in un intorno di $\vec{y_0} = (0,0)$ e se sì, si dia una stima di $\rho$ in modo tale che valga (7.22).

*Soluzione*:

$f$ è continua, quindi studiamo la Jacobiana di $f$:

$$\nabla f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 + 2y_1 \cos y_2 & -y_1^2 \sin y_2 \\ 2y_1 & 1 \end{pmatrix}, \ \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è invertibile; dunque $f$ è invertibile in un intorno di $\vec{y}_0$, cerchiamo $\rho$.

$$\sup_{\|(y_1,y_2)\| \leq \rho} \left\| \begin{pmatrix} -2y_1 \cos y_2 & y_1^2 \sin y_2 \\ -2y_1 & 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{1}{2}$$

Come al solito studiamo i moduli dei singoli elementi:

$$|-2y_1 \cos y_2| \leq 2\rho \leq \frac{1}{4}, \ \rho \leq \frac{1}{8}$$

$$|y_1^2 \sin y_2| \leq |y_1^2 y_2| \leq \rho^3 \leq \frac{1}{4}, \ \rho \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$|-2y_1| \leq 2\rho \leq \frac{1}{4}, \ \rho \leq \frac{1}{8}$$

Da cui si deduce che $f$ è invertibile nella sfera di raggio $\frac{1}{8}$.