Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

3 Aprile 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATO 7 [PREPARAZIONE ALL'ESONERO]

1. Esercizio 1

   Si studino massimi e minimi assoluti (ed eventualmente sup e inf) delle seguenti funzioni sui relativi vincoli M:

   - $f(x, y, z) = x^2 + \cos y$ su $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + e^{z^2} \le 10\}$
   - $f(x, y, z) = g(x)+g(y)+g(z)$ su $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \le 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$, dove

   $$g(t) := \begin{cases} t \ln t & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

   - $f(x, y, z) = \frac{y^2 - z^2}{1+x^2}$ su $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$

   Soluzione

   - Innanzitutto studiamo eventuali massimi o minimi assoluti della funzione. Il dominio della stessa è chiaramente tutto $\mathbb{R}^3$, quindi guardiamo al gradiente:

   $$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin y \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Dunque eventuali punti di massimo o minimo sono punti della forma $P_{k,t} = (0, k\pi, t)$. Si vede però che i $P_{k,t}$ non sono in M se $k \neq 0$ e se $k = 0$ il punto $P_{0,t}$ è di sella (infatti $f(P_{0,t} + (0, \varepsilon, 0)) \le f(P_{0,t}) \le f(P_{0,t} + (\varepsilon, 0, 0))$ per infiniti ε). Poichè il vincolo M è un compatto esistono massimi e minimi locali, che possiamo trovare con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Avremo

   $$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + e^{z^2} - 10,\ \nabla\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2ze^{z^2} \end{pmatrix}$$

   Risolviamo dunque

   $$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda\nabla\varphi(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -\sin y = \lambda 2y \\ 0 = \lambda 2ze^{z^2} \\ x^2 + y^2 + e^{z^2} = 10 \end{cases}$$

Dalla terza si ha o che $\lambda = 0$ o che $z = 0$. Cominciamo con $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ e^{x^2} = 10 \end{cases}$$

E troviamo così la nostra prima coppia di punti critici, $P_{1\pm} = \left(0, 0, \pm\sqrt{\ln 10}\right)$
Studiamo poi il caso $z = 0$

$$\begin{cases} z = 0 \\ (\lambda - 1)x = 0 \\ 2\lambda y + \sin y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Analogamente a prima, o $\lambda = 1$ o $x = 0$. Se $\lambda = 1$

$$\begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 1 \\ 2y = -\sin y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Si vede facilmente che $2y = -\sin y \Leftrightarrow y = 0$, dunque

$$\begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 1 \\ y = 0 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

che ci dà la nostra seconda coppia di punti, $P_{2\pm} = (\pm 3, 0, 0)$. Vediamo infine se $x = 0$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ \lambda = -\frac{\sin y}{2y} \\ y^2 = 9 \end{cases}$$

Che ci dà infine $P_{3\pm} = (0, \pm 3, 0)$.
Calcolando f nei vari punti vediamo qual'è il massimo e il minimo.

$$f(P_{1\pm}) = 1, f(P_{2\pm}) = 9, f(P_{3\pm}) = \cos 3$$

Dunque il massimo di f in M è 9 assunto in $P_{2\pm}$ e il minimo è $\cos 3$ assunto in $P_{3\pm}$.

- Studiamo i massimi e i minimi della funzione. Il dominio di questa è ${\mathbb{R}^+}^3$, guardiamo al gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \ln x + 1 \\ \ln y + 1 \\ \ln z + 1 \end{pmatrix}$$

Dunque l'unico possibile massimo o minimo è il punto $P_0 = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.
Per vedere se è massimo o minimo studiamo l'Hessiana di f:

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}, \; Hf(P_0) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Dunque P_0 è punto di minimo relativo per f.
Notiamo che anche se M non è compatto, la sua chiusura lo é, dunque cerchiamo ultriori massimi o minimi sulla chiusura e poi ci porremo il problema se siano massimi o sup, minimi o inf. Per trovare punti critici di f sulla chiusura di M in questo caso bisogna considerare il bordo di M attraverso più funzioni:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = x+y+z-1 & con\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = x & con\ y \geq 0, z \geq 0, y+z \leq 1 \\ \varphi_3(x,y,z) = y & con\ x \geq 0, z \geq 0, x+z \leq 1 \\ \varphi_4(x,y,z) = z & con\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \end{cases}$$

Cominciamo con φ_1. Si avrà

$$\nabla\varphi_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{cases} \ln x + 1 = \lambda \\ \ln y + 1 = \lambda \\ \ln z + 1 = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

Dalla biettività del logaritmo si vede chiaramente che

$$\begin{cases} x = y = z \\ 3x = 1 \end{cases}$$

Che ci dà il nostro secondo punto $P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
φ_2, φ_3 e φ_4 sono identici come comportamente, basta studiare quindi φ_2.

$$\nabla\varphi_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \ln x + 1 = \lambda \\ \ln y + 1 = 0 \\ \ln z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Che ci dà i tre punti $P_2 = \left(0, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, $P_3 = \left(\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right)$ e $P_4 = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}, 0\right)$.
Bisogna inoltre tenere in considerazione anche i punti $P_5 = (1,0,0)$, $P_6 = (0,1,0)$, $P_7 = (0,0,1)$ e $P_8 = (0,0,0)$.
Per vedere qual'è il massimo e il minimo della funzione in M la calcoliamo in ogni punto:

$$f(P_0) = -\frac{3}{e};\ f(P_1) = -\ln 3;\ f(P_2) = f(P_3) = f(P_4) = -\frac{2}{e};$$

$$f(P_5) = f(P_6) = f(P_7) = f(P_8) = 0$$

Da cui si vede che P_1 è punto di minimo e P_5, P_6, P_7 e P_8 sono punti di massimo per f.

...sulla chiusura di M. Per vedere quali di questi sono effettivamente massimi o minimi su M basta sapere se questi punti sono o non sono in M. P_1 è in M, dunque il massimo è assunto, mentre poichè gli altri non sono in M sono punti di sup per la funzione.

- Studiamo innanzitutto studiamo massimi o minimi della funzione. Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}^3$, quindi guardiamo il gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{2x(y^2-z^2)}{(1+x^2)^2} \\ \frac{2y}{1+x^2} \\ -\frac{2z}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

Da cui evetuali punti critici saranno i $P_t = (t, 0, 0)$, che però non sono chiaramente punti di massimo nè minimo assoluti.

Poichè il vincolo è un compatto, questo ci assicura l'esistenza di massimi e minimi locali su M, quindi passiamo ad applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il vincolo sarà dato da

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4, \ \nabla\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Passiamo quindi allo studio del sistema:

$$\begin{cases} -\frac{2x(y^2-z^2)}{(1+x^2)^2} = 2\lambda x \\ \frac{2y}{1+x^2} = 2\lambda y \\ -\frac{2z}{1+x^2} = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Sostituendo a λ una $\lambda' = \lambda(1 + x^2)$, ma scrivendo ancora per comodità λ si ha

$$\begin{cases} -x(y^2 - z^2) = \lambda x(1 + x^2) \\ y = \lambda y \\ -z = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x(y^2 - z^2) = \lambda x(1 + x^2) \\ (\lambda - 1)y = 0 \\ (\lambda + 1)z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Se $\lambda = 1$

$$\begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 1 \\ -xy^2 = x(1 + x^2) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 1 \\ x(x^2 + y^2 + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Ovviamente si deve avere $x = 0$ per un confronto fra la terza e la quarta equazione, dunque questo ci dà il nostro primo punto $P_{0\pm} = (0, \pm 2, 0)$.
Vediamo ora se $\lambda = -1$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -1 \\ xz^2 = -x(1 + x^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Nuovamente si vede facilmente che si deve avere $x = 0$, dunque il nostro secondo punto è $P_{1\pm} = (0, 0, \pm 2)$.
Studiamo ora il caso $\lambda \neq \pm 1$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda x(1 + x^2)x^2 = 4 \end{cases}$$

E questo ci dà il nostro ultimo punto $P_{3\pm} = (\pm 2, 0, 0)$, che però rientra in P_t. Vediamo ora quando si hanno massimi o minimi:

$$f(P_t) = 0;\ f(P_{0\pm}) = 4;\ f(P_{1\pm}) = -4$$

Dunque il massimo della funzione è assunto in $P_{0\pm}$) e il minimo in $P_{1\pm}$).

2. Esercizio 2

- Sia
$$F(x, y) = y(e^y + x) - \ln x$$
Verificare che esiste un intorno contenente il punto di ascissa $x_0 = 1$ in cui è definita una $y = g(x)$ tale che $g(x_0) = 0$ e $F(x, g(x)) = 0$.
- Applicare il teorema della funzione inversa alla funzione
$$F(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 + y_1^2 \cos y_2 \\ y_2 + y_1^2 \end{pmatrix}$$
nel punto $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e trovare i valori di r e ρ adatti.

Soluzione

- F è chiaramente C^∞ nel suo dominio, $F(P_0) = 0$ (dove $P_0 = (x_0, y_0) = (1, 0)$), vediamo il gradiente:
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^y + x + ye^y = (y + 1)e^y + x,\ \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) = 2,\ T = \frac{1}{2}$$
Dunque esiste un intorno del punto P_0 tale che esista la g. Per trovare ora ρ ed r studiamo:
$$\sup_{|x-1| \leq r} |F(x, y_0)| = \sup_{|x-1| \leq r} |-\ln x| \leq \sup_{|x-1| \leq r} 2|x-1| = 2r \leq \frac{\rho(1-\theta)}{T} = 2(1-\theta)\rho,$$

$$r \leq 2(1-\theta)\rho$$

$$\sup_{|x-1|\leq r,\ |y|\leq\rho} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = \sup_{|x-1|\leq r,\ |y|\leq\rho} \left|1 - \frac{1}{2}(y+1)e^y - \frac{1}{2}x\right| \leq$$

$$\leq \sup_{|x-1|\leq r,\ |y|\leq\rho} \frac{1}{2}\left(|x-1| + |y|e^{|y|} + |1-e^y|\right) \leq \frac{1}{2}(r + \rho e^{\rho} + 3\rho) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(2(1-\theta)\rho + 3\rho + 3\rho) = \frac{8-2\theta}{2}\rho \leq \frac{1}{2},\ \rho \leq \frac{1}{8-2\theta}$$

Dunque l'intorno cercato è dato da $|x-1| \leq r$ e $|y| \leq \rho$ dove $\forall\theta \in [0,1]$

$$\begin{cases} \rho \leq \frac{1}{8-2\theta} \\ r \leq 2(1-\theta)\rho \end{cases}$$

- Anche qui f è chiaramente C^∞, studiamo il gradiente:

  $$\nabla f(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1+2y_1\cos y_2 & 2y_1 \\ -y_1^2 \sin y_2 & 1 \end{pmatrix},\ \nabla f(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}$$

  Dunque passiamo a studiare

  $$\sup_{|y_1|\leq\rho,\ |y_2|\leq\rho} \|\mathbb{I} - T\nabla f(y_1,y_2)\| =$$

  $$= \sup_{|y_1|\leq\rho,\ |y_2|\leq\rho} \left\|\begin{pmatrix} -2y_1\cos y_2 & y_1^2\sin y_2 \\ -2y_1 & 0 \end{pmatrix}\right\| \leq \theta$$

  E per una stima usata già in precedenza basta studiare i singoli elementi della matrice

  $$\sup_{|y_1|\leq\rho,\ |y_2|\leq\rho} |-2y_1\cos y_2| \leq 2\rho \leq \frac{\theta}{2},\ \rho \leq \frac{\theta}{4}$$

  $$\sup_{|y_1|\leq\rho,\ |y_2|\leq\rho} \left|y_1^2\sin y_2\right| \leq \rho^3 \leq \rho \leq \frac{\theta}{2}$$

  $$\sup_{|y_1|\leq\rho,\ |y_2|\leq\rho} |-2y_1| \leq 2\rho \leq \frac{\theta}{2},\ \rho \leq \frac{\theta}{4}$$

  Dunque, usando l'ulteriore stima che abbiamo su r (cioè $r \leq (1-\theta)\rho$) otteniamo che f è invertibile e manda B_r in B_ρ dove

  $$\begin{cases} \rho \leq \frac{\theta}{4} \\ r \leq (1-\theta)\rho \end{cases}$$

3. Esercizio 3

   Calcolare i seguenti integrali sui domini D:

   - $\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\right\}$
   - $\int_D y^3 e^x dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0, x \leq 1, x \geq y^2\right\}$
   - $\int_D x^2 dxdydz \qquad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right\}$ *con* $a,b,c \in \mathbb{R}$
   - $\int_D x^2(y-x^3)e^{y+x^3} dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^3 \leq y \leq 3, x \geq 1\right\}$

   Soluzione

- $$\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 (\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}dy)dx = \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{x}+x\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9}{4}$$

- $$\int_D y^3e^x dxdy = \int_0^1 (\int_{y^2}^1 y^3 e^x dx)dy = \int_0^1 y^3 \left[e^x\right]_{y^2}^1 dy = \int_0^1 \left(ey^3 - y^3e^{y^2}\right) dy =$$

$$= \left[\frac{e}{4}y^3 - \frac{1}{2}y^2e^{y^2} + \frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{e}{4} - \frac{1}{2}$$

- L'integrale risulta facilmente integrabile se si usa la sostituzione

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\alpha \sin\beta \\ y = b\rho\sin\alpha\cos\beta \\ z = c\rho\cos\alpha \end{cases}$$

con $\rho \in [0,1]$, $\alpha \in [0,\pi]$ e $\beta \in [0, 2\pi]$. e con il determinante dello Jacobiano pari a $abc\rho^2 \sin\alpha$.
Passiamo dunque al calcolo dell'integrale (ricordando che $\sin\alpha = |\sin\alpha|$ per $\alpha \in [0,\pi]$)

$$\int_D x^2 dxdydz = \int_0^1 (\int_0^\pi (\int_0^{2\pi} (abc\rho^2\sin\alpha)(a^2\rho^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)d\beta)d\alpha)d\rho =$$

$$= a^3bc(\int_0^1 \rho^4 d\rho)(\int_0^\pi \sin^3\alpha d\alpha)(\int_0^{2\pi}\sin^2\beta d\beta) =$$

$$= a^3bc\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \left[-\cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha\right]_0^\pi \left[\frac{2\beta - \cos 2\beta}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= a^3bc \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \pi = a^3bc\pi\frac{4}{15}$$

- Se usiamo la sostituzione

$$\begin{cases} u = y + x^3 \\ v = y - x^3 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{u-v}{2}} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}$$

si ha che il determinante dello Jacobiano è $\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{4}{(u-v)^2}}$, ed inoltre

$$\begin{array}{lcl} x^3 \le y & \Rightarrow & v \ge 0 \\ y \le 3 & \Rightarrow & u+v \le 6 \\ x \ge 1 & \Rightarrow & u - v \ge 2 \end{array}$$

Notiamo che $u \in [2,6]$ e $v \in [0, \min\{u-2, 6-u\}]$, dunque

$$\int_D x^2(y-x^3)e^{y+x^3}dxdy =$$

$$= \int_2^6 (\int_0^{\min\{u-2,6-u\}} \sqrt[3]{\frac{(u-v)^2}{4}} ve^u \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{4}{(u-v)^2}} du)dv =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_2^4 (\int_0^{u-2} ve^u dv)du + \int_4^6 (\int_0^{6-u} ve^u dv)du\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_2^4 e^u \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{u-2} du + \int_4^6 e^u \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{6-u} du\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\int_2^4 (u-2)^2 e^u du + \int_4^6 (6-u)^2 e^u du\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\left[(u-2)^2e^u - 2(u-2)e^u + 2e^u\right]_2^4 + \right.$$

$$\left. + \left[(6-u)^2e^u + 2(6-u)e^u + 2e^u\right]_4^6\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\underline{4e^4} - \underline{4e^4} + \underline{2e^4} - 2e^2 + 2e^6 - 4e^4 - 4e^4 - \underline{2e^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(e^6 - 4e^4 - e^2\right)$$