Prova scritta di AM4 del 2/11/2005 – (I Esonero)

- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**
- **Svolgere prima la Parte I.**

Parte I

1) (i) Dare la definizione di insieme di misura nulla ed enunciare risultati del tipo "Q è di misura nulla se e solo se ...".
(ii) Definire la classe $S(E)$. Dimostrare che date due funzioni in $S(E)$ è possibile rappresentarle tramite la stessa famiglia di rettangoli. Dimostrare che se $f \in S(E)$ e $f \neq 0$ allora anche $1/f \in S(E)$.
(iii) Definire le classi $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{L}^1(E)$ e $L^1(E)$. Enunciare i teoremi di convergenza monotona e convergenza dominata.

2) (i) Dimostrare che un aperto non può essere di misura nulla.
(ii) Dare un esempio di funzione limitata in $\mathcal{L}^1((0,1))$ che non sia equivalente ad alcuna funzione integrabile secondo Riemann ("equivalente" significa "essere uguale q.o.").

3) Sia $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$. Dimostrare che $f \in \mathcal{L}^1((0,1))$ ma $f \notin \mathcal{F}(E)$; trovare due funzioni $f_i \in \mathcal{F}((0,1))$ tali che $f = f_1 - f_2$.

Parte II

4) Enunciare i due "lemmi" fondamentali su cui si basa la definizione di $\mathcal{F}(E)$ e dimostrane uno a piacere.

5) Dimostrare il teorema di convergenza dominata.

6) Dimostrare che le funzioni q.o. nulle sono le funzioni il cui integrale del modulo è nullo.

7) Trovare una funzione continua $f \in \mathcal{L}^1((0,\infty))$ tale che

$$\limsup_{x\to 0} f = \infty = \limsup_{x\to\infty} f \ .$$