Soluzioni della prova scritta di AM4 del 2/11/2005 – (I Esonero)

Vengono riportate le risposte alle questioni non affrontate esplicitamente a lezione.

1) (ii) Dimostrare che se $f \in S(E)$ e $f \neq 0$ allora anche $1/f \in S(E)$.

Soluzione: Dalle ipotesi segue che $f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{R_i}$ con R_i rettangoli in E a due a due disgiunti, $c_i \neq 0$ per ogni i e $\bigcup_i R_i = E$. In tal caso $1/f = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{c_i} \chi_{R_i}$.

3) Sia $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$. Dimostrare che $f \in \mathcal{L}^1((0,1))$ ma $f \notin \mathcal{F}(E)$; trovare due funzioni $f_i \in \mathcal{F}((0,1))$ tali che $f = f_1 - f_2$.

Soluzione: Innanzitutto $1/\sqrt{x} \in \mathcal{L}^1((0,1))$: infatti se $f_k := \chi_{(1/k,1)} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ allora $f_k \uparrow f$ su $(0,1)$ e

$$\int_0^1 f_k = 2(1 - \sqrt{1/k}) < 2$$

e quindi $1/\sqrt{x} \in \mathcal{F}((0,1)) \subset \mathcal{L}^1((0,1))$. Sia $g_k := f_k \operatorname{sen} 1/x$. Allora, $g_k \in \mathcal{L}^1$, $g_k \to f$ e $|g_k| \leq 1/\sqrt{x} \in \mathcal{L}^1$ e dunque dal teorema di convergenza dominata $f \in \mathcal{L}^1$.
Poiché $\inf f = -\infty$, $f \notin \mathcal{F}$ (per definizione le funzioni in $\mathcal{F}$ sono limitate dal basso).
$f_1 = f_+$ e $f_2 := f_-$.

Parte II

7) Trovare una funzione continua $f \in \mathcal{L}^1((0,\infty))$ tale che

$$\limsup_{x\to 0} f = \infty = \limsup_{x\to\infty} f \ .$$

Soluzione: Sia φ la funzione con supporto $[0,1]$ che vale $1 - |2x - 1|$ in $[0,1]$; si può prendere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \varphi\Big((x-n)n^4\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} n\, \varphi\Big((x-1/n)n^4\Big) \ .$$

Chiaramente prendendo una funzione $0 \leq \varphi \in C^\infty$ con supporto in $[0,1]$ si può generalizzare tale esempio ottenendo una funzione $C^\infty((0,\infty))$.