UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

AM6 Principi dell'analisi funzionale

A.A. 2005 - 2006
Prof. L. Chierchia

Il problema di Dirichlet in $\mathbb{R}^3$ e operatori compatti

Appunti di

Filippo Cavallari e Livia Corsi

Sia D un aperto, connesso e limitato di $\mathbb{R}^3$, con bordo $\partial D := \overline{D} \backslash D$ regolare (ossia ∂D è una superficie regolare, orientabile e chiusa).

Problema (di Dirichlet) *Data $f \in C(\partial D)$, trovare $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ tale che*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = f & \text{su } \partial D \end{cases} \tag{1}$$

La soluzione di (1), se esiste, è unica, come segue dal seguente

Teorema 1 (Principio del massimo). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora*

$$\Delta u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

$$\Delta u \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

$$\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Dimostrazione Cominciamo col dimostrare la prima affermazione. Osserviamo intanto che se $\Delta u > 0$ su Ω, allora u non può assumere massimo in alcun punto $\xi \in \Omega$. Infatti se $\xi \in \Omega$ fosse un punto di massimo dovrebbe valere $[\partial^2 u/\partial x_k^2](\xi) \leq 0$ per ogni k, e quindi $\Delta u \leq 0$. Nel caso in cui $\Delta u \geq 0$ su Ω, consideriamo la funzione ausiliaria $v = |x|^2$ per cui vale $\Delta v > 0$ su Ω. Allora $\forall \varepsilon > 0$ la funzione $u + \varepsilon v$ è $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e soddisfa $\Delta(u + \varepsilon v) > 0$; quindi

$$\max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) = \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon v).$$

Perciò, poiché $u + \varepsilon v \geq u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v$ allora $\max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) \geq \max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v$ e quindi

$$\max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v \leq \max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v.$$

Perciò, per $\varepsilon \to 0$ otteniamo la tesi.

La seconda affermazione si dimostra in maniera analoga notando che se consideriamo la funzione $w = -u$ allora troviamo che $\Delta w = -\Delta u \geq 0$. Applicando quanto abbiamo appena dimostrato a w troviamo

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w$$

e, poiché $-\max w = \min u$ segue la tesi.

Infine, da $|a| = \max\{a, -a\}$ per $a \in \mathbb{R}$ segue la terza affermazione. $\square$

Osservazione 2. Dal principio del massimo segue immediatamente che la soluzione di (1) è unica. Infatti siano u_1, u_2 due soluzioni di (1) allora $\widetilde{u} = u_1 - u_2$ risolve

$$\begin{cases} \Delta \widetilde{u} = 0 & \text{in } D \\ \widetilde{u} = 0 & \text{su } \partial D \end{cases}$$

quindi, per il principio del massimo

$$\max_{\overline{\Omega}} |\widetilde{u}| = \max_{\partial\Omega} |\widetilde{u}| = 0$$

perciò $\widetilde{u} \equiv 0$ e dunque $u_1 \equiv u_2$.

Il principio del massimo può essere formulato con ipotesi meno restrittive sul dominio. Ad esempio:

Teorema 3 (Principio del massimo per domini illimitati). *Sia Ω un aperto connesso illimitato di $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Se $\Delta u = 0$ in Ω, e*

$$\lim_{\substack{x\in\Omega \\ |x|\to+\infty}} u(x) = 0$$

Allora

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Dimostrazione Osserviamo innanzitutto che dalle ipotesi segue che $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\max_{\overline{\Omega}\setminus B(0,n)} |u| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N.$$

Per assurdo supponiamo che esista $\overline{x} \in \Omega$ tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = |u(\overline{x})|.$$

Fissato $0 < \varepsilon < |u(\overline{x})|/2$ sia n tale che $\overline{x} \in B(0,n) \cap \Omega$. Notiamo che, per quanto detto prima, dovrà essere $n > N$. Osserviamo che $B(0,n)\cap\Omega$ è limitato, quindi per il principio del massimo sarà $\overline{x} \in \partial(B(0,n) \cap \Omega)$ e, poiché avevamo assunto $\overline{x} \in \Omega$ allora necessariamente $\overline{x} \in \partial B(0,n) \cap \Omega$.
D'altra parte $|u(x)| < \varepsilon\ \forall\, x \in \overline{\Omega}\setminus B(0,n) \supset \Omega\cap\partial B(0,n)$ e quindi $|u(\overline{x})| < \varepsilon < |u(\overline{x})|/2$ il che è assurdo. $\square$

Definizione 4. Sia $y \in \partial D$, $\nu(y)$ la normale esterna a ∂D in y e $x \in \mathbb{R}^3$ con $x \neq y$. Definiamo

$$K(x,y) := \frac{1}{2\pi}\,\frac{(x-y)\cdot\nu(y)}{|x-y|^3}.$$

Lemma 5.

$$\Delta_x K(x,y) = 0 \qquad \forall x \neq y$$

Dimostrazione Posto $g(x) = \dfrac{x\cdot n}{|x|^3}$, $n \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{n_j}{|x|^3} - 3(x\cdot n)\frac{x_j}{|x|^5}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} = -\frac{6n_j x_j}{|x|^5} - 3\frac{(x\cdot n)}{|x|^5} + 15(x\cdot n)\frac{x_j^2}{|x|^7}$$

da cui si ricava

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} = -6\frac{(x\cdot n)}{|x|^5} - 9\frac{(x\cdot n)}{|x|^5} + 15\frac{(x\cdot n)}{|x|^5} = 0.$$

□

Osservazione 6. Sia $\varphi \in C(\partial D)$ e sia

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y). \tag{2}$$

Allora

(i) $u \in C^2(\Omega)$
(ii) $\Delta u = 0$ in Ω
dove $\Omega := \mathbb{R}^3 \backslash \partial D$

Infatti sia $x_0 \in \Omega$, allora $\exists\ \rho > 0$ tale che $B_{2\rho}(x_0) \subset \Omega$ e quindi

$$\frac{\partial^p}{\partial x_j^p} u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial^p}{\partial x_j^p} K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y) \qquad \forall x \in B_\rho(x_0)$$

perciò $\Delta_x u = 0$.

Teorema 7. *Sia*

$$T\ :\ \varphi \in C(\partial D) \ \longmapsto\ T\varphi = \int_{\partial D} K(\cdot,y)\varphi(y)d\sigma(y). \tag{3}$$

Allora $\forall x_0 \in \partial D$, $\forall \varphi \in C(\partial D)$ valgono le seguenti affermazioni:

(i) L'applicazione $y \mapsto K(x_0,y)\varphi(y)$ è $L^1(\partial D)$.
(ii) Sia X lo spazio di Banach $C(\partial D)$ dotato della norma del massimo $\|\varphi\|_\infty = \max_{\partial D} |\varphi|$.
L'operatore $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ è compatto.
(iii) Se u è come in (2) allora

$$\lim_{\substack{x\in D\\ x\to x_0}} u(x) = -\varphi(x_0) + (T\varphi)(x_0)$$
$$\lim_{\substack{x\in \overline{D}^c\\ x\to x_0}} u(x) = \varphi(x_0) + (T\varphi)(x_0).$$

Per la dimostrazione di questo teorema, avremo bisogno prima di alcuni risultati preliminari.

Lemma 8. *Sia Σ una superficie regolare compatta in $\mathbb{R}^3$. $\forall z \in \mathbb{R}^3$, $\forall A \in SO_3(\mathbb{R})$ sia $\Psi(x) = Ax + z$, allora $\Psi(\Sigma)$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e*

$$\int_{\Sigma} f\, d\sigma_\Sigma = \int_{\Psi(\Sigma)} f \circ \Psi^{-1} d\sigma_{\Psi(\Sigma)}$$

Dimostrazione Supponiamo intanto $\Sigma = \Phi(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ misurabile secondo Peano-Jordan e Φ un inclusione differenziabile (cioè $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, iniettiva e $|\Phi_u \wedge \Phi_v| \neq 0$ su $\mathring{U}$). Allora $(\Psi \circ \Phi)(U) = \Psi(\Sigma)$. Quindi

$$\int_\Sigma f \mathrm{d}\sigma_\Sigma = \int_U f \circ \Phi |\Phi_u \wedge \Phi_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

e d'altra parte

$$\int_{\Psi(\Sigma)} f \circ \Psi^{-1} \mathrm{d}\sigma_{\Psi(\Sigma)} = \int_U f \circ \Phi |A\Phi_u \wedge A\Phi_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_U f \circ \Phi |\Phi_u \wedge \Phi_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

In generale, poiché Σ è compatta, possiamo ricoprirla con un numero finito di domini d'intergazione, $D_1, \dots, D_n$ tali che
(i) $\mathrm{meas}(D_i \cap D_j) = 0$ se $i \neq j$.
(ii) $\forall\, D_i\ \exists U_i \subset \mathbb{R}^2$ e $\Phi_i \in C^1(U_i, \mathbb{R}^3)$ tale che $\Phi_i(U_i) = D_i$.
A questo punto, per linearità dell'integrale, avremo

$$\int_\Sigma f \mathrm{d}\sigma_\Sigma = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f \mathrm{d}\sigma_\Sigma = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} f \circ \Phi_i |(\Phi_i)_u \wedge (\Phi_i)_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Ripetendo quindi il ragionamento di prima, segue la tesi.

□

Lemma 9. *Siano x, $x_0 \in \partial D$. Allora*

$$(x - x_0) \cdot \nu(x_0) = O(|x - x_0|^2).$$

Più precisamente, $\exists\, M$ tale che $\forall\, x, x_0 \in \partial D$ si ha che

$$|\nu(x_0) \cdot (x_0 - x)| \leq M|x_0 - x|^2. \tag{4}$$

Dimostrazione Sappiamo che $\forall\, \overline{x} \in \partial D$ esistono $r > 0$, $B_{2r}(\overline{x})$ e $\psi \in C^2(\overline{U}, B_{2r}(\overline{x}) \cap \partial D)$ con $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, tali che $|\psi_{u_1} \times \psi_{u_2}| \neq 0\ \forall u \in \overline{U}$ e $\partial D \cap B_{2r}(\overline{x}) = \psi(\overline{U})$. Notiamo inoltre che $\partial D \subset \bigcup_{\overline{x} \in \partial D} B_r(\overline{x})$, pertanto, poiché ∂D è compatto, esistono $\overline{x}^{(1)}, \dots, \overline{x}^{(N)} \in \partial D$, $r_i > 0$ per $i = 1, \dots, N$ e $\psi^i \in C^2(\overline{U}^{(i)}, B_{r_i}(\overline{x}^{(i)}))$ con $U^{(1)}, \dots, U^{(N)} \subset \mathbb{R}^2$ come sopra, e inoltre $\partial D \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i}(\overline{x}^{(i)})$. Ora $\forall\, x_0 \in \partial D \exists\, j$ tale che $x_0 \in B_{r_j}(\overline{x}^{(j)}) \cap \partial D$. Definito $r = \min_{1 \leq i \leq N} r_i$, distinguiamo due casi:
caso 1 $|x - x_0| \geq r$. In questo caso si ha $|\nu(x_0) \cdot (x - x_0)| \leq |x - x_0| \leq M_1 |x - x_0|$ dove $M_1 := \dfrac{1}{r}$.
caso 2 $|x - x_0| < r$. Certamente $x \in B_{2r_j}(\overline{x}^{(j)})$ infatti $|x - \overline{x}^{(j)}| \leq |x - x_0| + |\overline{x}^{(j)} - x_0| \leq r + r_j \leq 2r_j$. Siano quindi $u, u_0 \in U^{(j)}$ tali che $x = \psi^j(u)$ e $x_0 = \psi^j(u_0)$. Se consideriamo lo sviluppo di Taylor di ψ^j intorno a u_0

$$\begin{aligned}\psi^j(u) - \psi^j(u_0) &= \psi_u(u_0) \cdot (u - u_0) + R_2(u, u_0) \\ &= \psi_u(u_0) \cdot (u - u_0) + \int_0^1 (1 - t) \partial_u^2 \psi((1 - t)u_0 + tu)(u - u_0)^2 \mathrm{d}t\end{aligned}$$

vediamo che possiamo stimare il resto integrale $R_2(u,u_0)$ con

$$|R_2(u,u_0)| \leq \sqrt{3}\sup_{i,j,k}\left|\frac{\partial \psi_i^k}{\partial u_j}\right|_{U^{(j)}} |u-u_0|^2$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
|\nu(x_0)\cdot(x-x_0)| &= \left|\frac{\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}}{\left|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}\right|}(u_0)\cdot(\psi^j(u)-\psi^j(u_0))\right| \\
&\leq \frac{1}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|}\,\left|(\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2})(u_0)\cdot\psi_u(u_0)(u-u_0)\right| + \frac{R_2(u,u_0)}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|} \\
&= \frac{R_2(u,u_0)}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|} \\
&\leq M_2|u-u_0|^2
\end{aligned}$$

perché $\dfrac{1}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|}$ è limitato, ossia $\exists\ a$ tale che $\dfrac{1}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|} \leq a\ \forall\ j,\ \forall\ u \in U^{(j)}$. A questo punto innanzitutto notiamo che

$$\begin{aligned}
|x-x_0-R_2(u,u_0)|^2 &= |\psi^j(u)-\psi^j(u_0)|^2 \\
&= |\psi_u(u-u_0)|^2 \\
&= \big((\psi^j_u)^T\psi^j_u(u-u_0)\cdot(u-u_0)\big) \\
&\geq \lambda^2|u-u_0|^2
\end{aligned}$$

dove λ è il minimo degli autovalori di $(\psi^j_u)^T\psi^j_u$. Allora da $|x-x_0|+|R_2(u,u_0)| \geq |x-x_0-R_2(u,u_0)| \geq \lambda|u-u_0|$ segue

$$\begin{aligned}
|x-x_0| &\geq \lambda|u-u_0| - |R_2(u,u_0)| \\
&\geq \lambda|u-u_0| - c|u-u_0|^2 \\
&\geq |u-u_0|(\lambda - c|u-u_0|) \\
&\geq \frac{\lambda}{2}|u-u_0|
\end{aligned}$$

dove

$$c = a\sqrt{3}\sup_{i,j,k}\left|\frac{\partial \psi_i^k}{\partial u_j}\right|_{U^{(j)}} |u-u_0|^2$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
|\nu(x_0)\cdot(x-x_0)| &= \left|\frac{\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}}{\left|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}\right|}(u_0)\cdot(\psi^j(u)-\psi^j(u_0))\right| \\
&\leq \frac{1}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|}\,\left|(\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2})(u_0)\cdot\psi_u(u_0)(u-u_0)\right| + \frac{R_2(u,u_0)}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|} \\
&= \frac{R_2(u,u_0)}{|\psi^j_{u_1}\times\psi^j_{u_2}|} \\
&\leq M_2|u-u_0|^2
\end{aligned}$$

perché $\dfrac{1}{|\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2}|}$ è limitato, ossia $\exists\ a$ tale che $\dfrac{1}{|\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2}|} \leq a\ \forall\ j,\ \forall\ u \in U^{(j)}$. A questo punto innanzitutto notiamo che

$$\begin{aligned} |x - x_0 - R_2(u, u_0)|^2 &= |\psi^j(u) - \psi^j(u_0)|^2 \\ &= |\psi_u(u - u_0)|^2 \\ &= \big((\psi^j_u)^T \psi^j_u (u - u_0) \cdot (u - u_0)\big) \\ &\geq \lambda^2 |u - u_0|^2 \end{aligned}$$

dove λ è il minimo degli autovalori di $(\psi^j_u)^T \psi^j_u$. Allora da $|x - x_0| + |R_2(u, u_0)| \geq |x - x_0 - R_2(u, u_0)| \geq \lambda |u - u_0|$ segue

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\geq \lambda |u - u_0| - |R_2(u, u_0)| \\ &\geq \lambda |u - u_0| - c|u - u_0|^2 \\ &\geq |u - u_0|(\lambda - c|u - u_0|) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} |u - u_0| \end{aligned}$$

dove

$$c = a\sqrt{3} \sup_{i,j,k} \left| \frac{\partial \psi^k_i}{\partial u_j} \right|_{U^{(j)}} |u - u_0|^2$$

quindi

$$|\nu(x_0) \cdot (x - x_0)| \leq c^2 |x - x_0|^2$$

□

Lemma 10. *Sia $k \in C(\partial D \times \partial D, \mathbb{R})$. Allora l'operatore*

$$S : f \in C(\partial D) \longmapsto Sf = \int_{\partial D} k(\cdot, y) f(y) d\sigma(y)$$

manda X *in se stesso ed è un operatore lineare compatto.*

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset C(\partial D)$ con $\|f_n\| \leq M$. Allora $\|Sf_n\|_\infty \leq \|k\|_\infty M$ perciò $\{Sf_n\}$ è equilimitata. Ora $\forall \varepsilon > 0$ sia δ :

$$|k(x, y) - k(x', y)| < \frac{\varepsilon}{M \operatorname{mis}(\partial D)} \qquad \forall |x - x'| < \delta,\ x, x', y \in \partial D$$

Allora, $\forall x_0 \in \partial D$ avremo

$$|Sf_n(x) - Sf_n(x_0)| \leq M \int_{\partial D} |k(x, y) - k(x_0, y)| \mathrm{d}\sigma(y) < \varepsilon$$

e quindi $\{Sf_n\}$ è equicontinua. Dal teorema di Ascoli-Arzelà segue che esiste una sottosuccessione n_k tale che Sf_{n_k} converge uniformemente. □

Lemma 11. *Sia $x_0 \in \partial D$ e sia $\delta > 0$. Posto $B = B_\delta(x_0) \cap \partial D$, allora*

$$\lim_{t \to 0^\pm} t \int_B \frac{d\sigma(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} = \pm 2\pi.$$

Inoltre tale limite è uniforme in x_0, ossia $\forall\,\varepsilon>0$, $\forall\,\delta>0$, $\exists\,T$ tale che

$$\left| t\int_B \frac{d\sigma(y)}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} \mp 2\pi \right| < \varepsilon$$

$\forall\, 0<\pm\, t<T$, $\forall x_0\in\partial D$

Dimostrazione Assumiamo $|t|<\frac{\delta}{2}$ e cominciamo con l'osservare che

$$\int_{\{|y-x_0|\geq\delta\}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^3 \mathrm{mis}(\partial D). \tag{5}$$

Ora osserviamo che se $0<\delta_2<\delta_1$ avremo che, detti $B_1=B_{\delta_1}(x_0)\cap\partial D$ e $B_2=B_{\delta_2}(x_0)\cap\partial D$, da

$$\int_{B_1\setminus B_2} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} \leq \left(\frac{2}{\delta_2}\right)^3 \mathrm{mis}(\partial D).$$

segue che

$$\lim_{t\to0} t\int_{B_1} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} = \lim_{t\to0} t\int_{B_2} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}.$$

Per il lemma 8 possiamo assumere $x_0=(0,0,0)$ e $\nu(x_0)=(0,0,1)$; esistono ϕ regolare e $\rho>0$ tali che

$$\partial D\cap B_\rho(0)=\{y\in\mathbb{R}^3\,:\,\phi(y)=0,\,|y|<\rho\}$$

e $\{\phi<0\}\cap B_\rho(0)=D\cap B_\rho(0)$. Da cui $\nabla\phi=(0,0,1)$. Possiamo assumere (eventualmente riducendo ρ) che $\phi_{y_3}>0$ su $B_\rho(0)$. Per il teorema della funzione implicita esiste α regolare

$$\alpha:\{y_1^2+y_2^2<\rho^2\}\longrightarrow\mathbb{R}$$

tale che $\phi(y_1,y_2,\alpha(y_1,y_2))=0$. In questo caso, se $\delta<\rho$ (cosa che possiamo sempre assumere assumere in vista dell'osservazione precedente) poiché ϕ è ben definita su B_ρ, avremo

$$\int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} = \int_{\{y_1^2+y_2^2<\delta^2\}} \frac{\sqrt{1+\alpha_{y_1}^2+\alpha_{y_2}^2}}{(y_1^2+y_2^2+(\alpha-t)^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 =: I.$$

Fissiamo $0<\eta<1$, $\exists\,\delta_1(\eta)$ tale che $\forall\,\delta<\delta_1(\eta)$

$$\theta_-:=1-\eta<\sqrt{1+\alpha_{y_1}^2+\alpha_{y_2}^2}<1+\eta=:\theta_+$$

Inoltre $\exists\,\delta_2(\eta)<\delta_1$ tale che $|\alpha|\leq M|y_1^2+y_2^2|$ e la costante positiva M può essere presa indipendente da x_0 (compattezza di $\overline{D}$). Quindi se $|t|<T_1(\eta):=\frac{\eta}{4M}$ e $\delta<\min\{\delta_2(\eta),\frac{\eta}{2M^2}\}$ (cosicché $2M|t|+M^2\delta^2<\eta$) avremo

$$\begin{aligned}
|y_1^2+y_2^2+t^2-2\alpha t+\alpha^2| &\geq y_1^2+y_2^2+t^2-2|\alpha||t|-|\alpha|^2\\
&\geq y_1^2+y_2^2+t^2-2M(y_1^2+y_2^2)|t|-M^2(y_1^2+y_2^2)\delta^2\\
&\geq (1-2M|t|-M\delta^2)(y_1^2+y_2^2)+t^2\\
&\geq (1-\eta)(y_1^2+y_2^2)+t^2\\
&=\theta_-(y_1^2+y_2^2)+t^2.
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}|y_1^2+y_2^2+t^2-2t\alpha+\alpha^2| &\leq y_1^2+y_2^2+t^2+2|t||\alpha|+\alpha^2\\ &\leq y_1^2+y_2^2+t^2+2M|t|(y_1^2+y_2^2)+M^2\delta^2(y_1^2+y_2^2)\\ &=(1+2M|t|+M^2\delta^2)(y_1^2+y_2^2)+t^2\\ &\leq (1+\eta)(y_1^2+y_2^2)+t^2\\ &=\theta_+(y_1^2+y_2^2)+t^2.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\frac{1}{(\theta_+(y_1^2+y_2^2)+t^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{(y_1^2+y_2^2+(\alpha-t)^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{(\theta_-(y_1^2+y_2^2)+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e, passando agli integrali,

$$\theta_-\int_B\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{(\theta_+(y_1^2+y_2^2)+t^2)^{\frac{3}{2}}}\leq I\leq\theta_+\int_B\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{(\theta_-(y_1^2+y_2^2)+t^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

Ora, $\forall\,\theta>0$ vediamo che

$$\begin{aligned}\int_{\{|y|<\delta\}}\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{(\theta(y_1^2+y_2^2)+t^2)^{\frac{3}{2}}} &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{(\theta r^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{\pi}{\theta}\int_0^{\theta\delta^2}\frac{\mathrm{d}s}{(s+t^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{\pi}{\theta}\int_{t^2}^{\theta\delta^2+t^2}\frac{\mathrm{d}s}{s^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{\pi}{\theta}\left[\frac{2}{\sqrt{s}}\right]_{\theta\delta^2+t^2}^{t^2}\\ &=\frac{2\pi}{\theta}\left(\frac{1}{|t|}-\frac{1}{\sqrt{\theta\delta^2+t^2}}\right)\end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo applicato il teorema del cambio di variabili operando un passaggio a coordinate polari, nella seconda, sempre per il teorema del cambio di variabili, abbiamo considerato il riscalamento $s=\theta r^2$ e nella terza, con abuso di notazione, abbiamo considerato una traslazione di t^2 dato che l'integrale è invariante per traslazioni. A questo punto, $\forall\eta>0$, se $\delta<\delta_2(\eta)$ e $|t|<T_1$ abbiamo che vale la (6) e

$$\frac{\theta_-}{\theta_+}2\pi\leq\lim_{t\to0}|t|I\leq\frac{\theta_+}{\theta_-}2\pi$$

perciò, per $\eta\to0$ avremo

$$\lim_{t\to0}|t|I=2\pi.$$

da cui

$$\lim_{t\to0^\pm}tI=\pm\lim_{t\to0}|t||I|=\pm2\pi.$$

$\square$

Lemma 12. *Sia $\varphi \in C(\partial D)$ e u come in (2). Allora $\forall\, x_0 \in \partial D$*

$$\lim_{t\to 0^\pm} u(x_0 + t\nu(x_0)) = \pm\varphi(x_0) + (T\varphi)(x_0)$$

Inoltre tale limite è uniforme in x_0, ossia $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists T$ tale che

$$|u(x_0 + t\nu(x_0)) \mp \varphi(x_0) - (T\varphi)(x_0)| < \varepsilon \tag{7}$$

$\forall\, 0 < \pm t < T$, $x_0 \in \partial D$.

Dimostrazione

$$u(x_0 + t\nu(x_0)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} \frac{(x_0 + t\nu(x_0) - y)\cdot\nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3}\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} \frac{(x_0 - y)\cdot\nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3}\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y) + \\
&+ \frac{t}{2\pi}\int\limits_{\partial D} \frac{\nu(x_0)\cdot\nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3}\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y)
\end{aligned}$$

$$=: I_1 + I_2$$

Consideriamo prima I_1 e sia M come in (4). Allora $\forall\, |t| \le M/4$ si ha

$$\begin{aligned}
|x_0 + t\nu(x_0) - y|^2 &= |x_0 - y|^2 + t^2 - 2t\nu(x_0)\cdot(x - x_0) \\
&\ge |x_0 - y|^2(1 - 2|t|M) \\
&\ge \frac{1}{2}|x_0 - y|^2.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left|\frac{(x_0 - y)\cdot\nu(y)}{(x_0 + t\nu(x_0) - y)^3}\,\varphi(y)\right| \le 2\|\varphi\|_\infty \frac{|(x_0 - y)\cdot\nu(y)|}{|x_0 - y|^3} \tag{8}$$

che per il lemma (9) è una funzione $L^1(\partial D)$. Quindi dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue, segue che

$$\lim_{t\to 0} I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} \frac{(x_0 - y)\cdot\nu(y)}{|x_0 - y|^3}\,\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y) = (T\varphi)(x_0)$$

uniformemente in x_0. Passiamo ad analizzare I_2. Fissiamo ora $0 < \varepsilon < 1$. Per l'uniforme continuità delle funzioni $|\nu(x_0)\cdot\nu(y) - 1|$ e $\varphi(y)$ su ∂D, segue che $\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall\, |x_0 - y| < \delta$ si ha $|\nu(x_0)\cdot\nu(y) - 1| < \varepsilon$ e $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Scriviamo

$$\begin{aligned}
I_2 = &\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\{|y - x_0|\ge\delta\}} \frac{\nu(x_0)\cdot\nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3}\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y) + \\
&+\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\{|y - x_0|<\delta\}} \frac{\nu(x_0)\cdot\nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3}\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y)
\end{aligned}$$

Dalla (5) segue che se $|t| < \min\left\{\frac{\delta}{2}, \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 \frac{2\pi}{\|\varphi\|_\infty \text{mis}(\partial D)}\varepsilon\right\}$ allora

$$\left|\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|\geq\delta/2\}} \frac{\nu(x_0)\cdot\nu(y)}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y)\right| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^3 \frac{|t|}{2\pi}\|\varphi\|_\infty \mathrm{mis}(\partial D) < \varepsilon.$$

Per il lemma 11 $\exists T$, indipendente da x_0 tale che $\forall\, |t| < T$ si ha

$$\left|\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} \mp 1\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|t|}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} \leq 2.$$

Quindi se $|t| < T$, per la scelta di δ si ha che

$$\left|\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\nu(x_0)\cdot\nu(y)}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y) \mp \varphi(x_0)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|t|}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{|\nu(x_0)\cdot\nu(y)-1|}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}\|\varphi\|_\infty \mathrm{d}\sigma \;+\; \frac{|t|}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{|\varphi(y)-\varphi(x_0)|}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}\mathrm{d}\sigma$$

$$+\left|\varphi(x_0)\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3} \mp \varphi(x_0)\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\frac{|t|}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\|\varphi\|_\infty}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}\mathrm{d}\sigma \;+\; \varepsilon\frac{|t|}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{1}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}\mathrm{d}\sigma$$

$$+\left|\varphi(x_0)\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{1}{|x_0+t\nu(x_0)-y|^3}\mathrm{d}\sigma \mp \varphi(x_0)\right| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\|\varphi\|_\infty + 2\varepsilon + \varepsilon\|\varphi\|_\infty = (3\|\varphi\|_\infty + 2)\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

A questo punto possiamo dimostrare il teorema 7.

Dimostrazione (del teorema 7)
(i) Sia $x_0 \neq y \in \partial D$. Allora, per il lemma 9, si ha che

$$|K(x_0,y)| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{(x_0-y)\cdot\nu(y)}{|x_0-y|^3}\right| \leq \frac{M}{2\pi}\frac{1}{|x_0-y|}$$

che è integrabile su ∂D; pertanto l'applicazione $y \longmapsto K(x_0,y)\varphi(y) \in L^1(\partial D)$.

(ii) Per quanto appena dimostrato, $(T\varphi)(x_0)$ è ben definita. Mostriamo che T è un operatore compatto. Sia $h > 0$ e sia

$$T_h\varphi(x) = \int\limits_{\partial D} K_h(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y) \qquad \text{con} \qquad K_h(x,y) := \frac{1}{2\pi}\,\frac{(x-y)\cdot\nu(y)}{|x-y|^3+h}$$

Per il lemma 10 sappiamo che T_h è un operatore compatto; mostriamo quindi che T_h converge in norma a T. Sia $\varphi \in C(\partial D)$ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ e fissiamo $x_0 \in \partial D$. Allora

$$\begin{aligned}|((T_h-T)\varphi)(x_0)| = &\left|\int\limits_{\partial D\cap\{|x_0-y|<\delta\}} (K_h(x_0,y)-K(x,y))\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y)\right| + \\ &+\left|\int\limits_{\partial D\cap\{|x_0-y|\geq\delta\}} (K_h(x_0,y)-K(x,y))\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D\cap\{|x_0-y|<\delta\}} \frac{|(x_0-y)\cdot\nu(y)|}{|x_0-y|^3}\mathrm{d}\sigma(y) + \\ &+ \int\limits_{\partial D\cap\{|x_0-y|\geq\delta\}} |K_h(x_0,y)-K(x,y)|\mathrm{d}\sigma(y)\end{aligned}$$

Dal punto (i) segue che possiamo scegliere δ tale che

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D\cap\{|x_0-y|<\delta\}} \frac{|(x_0-y)\cdot\nu(y)|}{|x_0-y|^3}\mathrm{d}\sigma(y) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Ora definiamo

$$G := [0,1]\times(\{|x-x_0|\leq\delta/2\}\cap\partial D)\times(\{|y-x_0|\geq\delta\}\cap\partial D)\,.$$

L'applicazione

$$(h,x,y)\in G \longmapsto K_h(x,y)$$

è uniformemente continua, e quindi esiste $\delta_1 < 1$ tale che

$$|K_h(x,y)-K_0(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{mis}(\partial D)} \qquad \forall h<\delta_1,\quad |x-x_0|<\frac{\delta}{2}\quad |y-x_0|\geq\delta \tag{10}$$

Dunque se δ è come in (9) e δ_1 è come in (10), avremo che $|((T_h-T)\varphi)(x_0)| < \varepsilon$ e quindi $\|T_h-T\|_\infty < \varepsilon$.

(iii) Sia $\varepsilon > 0$ e sia δ tale che $|T\varphi(x)-T\varphi(\overline{x})| < \varepsilon$, $|\varphi(x)-\varphi(\overline{x})| < \varepsilon$ se $x,\overline{x}\in\partial D$ con $|x-\overline{x}|<\delta$. Inoltre possiamo scegliere δ in modo tale che $\forall x_0\in\partial D$, $\forall x\in B_\delta(x_0)$ esistono unici $\overline{x}\in\partial D\cap B_\delta(x_0)$ e $|t|<\delta$ tali che $x=\overline{x}+t\nu(\overline{x})$. Questo è vero perché $\exists\,\varepsilon_0>0$ tale che l'applicazione

$$\psi\,:\,(\overline{x},t)\in\partial D\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\longmapsto\overline{x}+t\nu(\overline{x})$$

è un diffeomorfismo da $\partial D\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ su $\psi(\partial D,(-\varepsilon_0,\varepsilon_0))$; chiaramente $t>0$ se $x\in\overline{D}^c$ mentre $t<0$ se $x\in D$. Sia ora $0<T<\delta$ tale che valga (7). Fissiamo $x_0\in\partial D$, $x\in B_\delta(x_0)\cap\partial D$ e sia $\overline{x}\in\partial D\cap B_\delta(x_0)$ tale che $x=\overline{x}+t\nu(\overline{x})$. Allora

$$\begin{aligned}|u(x)\pm\varphi(x_0)-T\varphi(x_0)|\leq|u(x)\pm\varphi(\overline{x})-T\varphi(\overline{x})|+\\ |\varphi(x_0)-\varphi(\overline{x})|+|T\varphi(x_0)-T\varphi(\overline{x})|<3\varepsilon\end{aligned}$$

□

Osservazione 13. Data $\varphi\in C(\partial D)$, sia u come in (2). Se estendiamo u su ∂D ponendo $u(x_0):=-\varphi(x_0)+(T\varphi)(x_0)$ per $x_0\in\partial D$, allora $u\in C^2(\Omega)\cap C(\mathbb{R}^3)$ quindi il problema (1) si può ricondurre ad un'equazione del tipo

$$(\mathbb{1}-T)(\varphi)=-f \tag{11}$$

su X, con incognita $\varphi\in C(\partial D)$.

Lemma 14. *$N(\mathbb{1}-T)=\{0\}$ (dove $N(S):=\{\varphi\in X\ :\ S\varphi=0\}$).*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $\exists\,0\neq\psi\in N(\mathbb{1}-T)$ i.e. $\psi=T\psi$. Sia

$$v(x):=\int_{\partial D}K(x,y)\psi(y)\mathrm{d}\sigma(y)$$

Per il punto (iii) del teorema (7), se $x_0\in D$ allora

$$\lim_{\substack{x\in D\\ x\to x_0}}v(x)=-\psi(x_0)+(T\psi)(x_0)=0$$

Per quanto osservato precedentemente, v è armonica in D e $v=0$ su ∂D da cui $v\equiv0$ in D per il principio del massimo. Di più, per il principio del massimo per domini illimitati (teorema 3), $v\equiv0$ in $\overline{D}^c$. Ma allora, per il punto (iii) del teorema (7),

$$0=\lim_{\substack{x\in\overline{D}^c\\ x\to x_0}}v(x)=\psi(x_0)+(T\psi)(x_0)$$

e quindi $2\psi(x_0)=0\ \ \forall x_0\in\partial D$ cioè $\psi\equiv0$. □

Osservazione 15. Dal teorema dell'alternativa di Fredholm, segue che

$$R(\mathbb{1}-T):=(\mathbb{1}-T)(C(\partial D))=C(\partial D)$$

quindi se u è come in (2) con φ come in (11), allora tale u è l'unica (per il principio del massimo) soluzione del problema (1).

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema 16. *Sia $D\subset\mathbb{R}^3$ un aperto connesso limitato con bordo ∂D regolare. Data $f\in C(\partial D)$ $\exists!\ u\in C^2(\mathbb{R}^3\backslash\partial D)$ tale che valga (1). Inoltre l'operatore T definito in (3) è un operatore compatto da $\mathrm{X}=(C(\partial D),\|\cdot\|_\infty)$ in se stesso e la soluzione u è data dalla formula (2) con φ unica soluzione di (11).*

Esercizio Generalizzare il Teorema 16 a $D\subset\mathbb{R}^n\ \forall\,n\geq2$.
Suggerimento. Si definisca

$$K(x,y):=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\,(x-y)\cdot\nu(y)\ln|x-y| & \text{se } n=2\\[2ex] \dfrac{2}{n\mathrm{Vol}(B(0,1))}\,\dfrac{(x-y)\cdot\nu(y)}{|x-y|^n} & \text{se } n\geq3\end{cases}$$