

Es 12 (i) Siano E ed F due spazi di Banach. Dimostrare che se $W \subset E' \times F'$ oppure $W \subset F' \times E'$ allora si ha che

$$JW^\perp = (JW)^\perp$$

dove $J(f, g) = (-g, f)$.

(ii) Siano E ed F due spazi di Banach e sia $T : E \rightarrow F$ una isometria surgettiva (ossia T è lineare e continuo, $T(E) = F$ e $\|Tu\|_F = \|u\|_E$ per ogni $u \in E$). Dimostrare che E è riflessivo se e solo se F è riflessivo.

(iii) Dimostrare la seguente affermazione:

Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia M un sottospazio vettoriale chiuso di E . Allora M è riflessivo (rispetto alla topologia ereditata da E).

(iv) Dimostrare la seguente affermazione:

Sia E uno spazio metrico separabile e sia $M \subset E$. Allora M è uno spazio metrico separabile.

Es 13 Sia $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ l'operatore $x = \{x_n\}_{n \geq 1} \rightarrow y = Tx$ con $y_n = x_n/n$. Determinare $N(T)$, $N(T)^\perp$, T^* , $R(T^*)$ e $\overline{R(T^*)}$.