Es 16 (viii) Siano

$$s_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}\, nx\ , \qquad\qquad c_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\ .$$

Dimostrare che $\{s_n :\ n \geq 1\}$ e $\{c_n :\ n \geq 0\}$ sono basi di Hilbert per lo spazio di Hilbert (reale) $L^2([0, \pi])$.

Es 17 Dimostrare che G sottospazio chiuso di E spazio di Banach ammette supplementare topologico nei seguenti casi[1]:

(i) dim $G < \infty$;

(ii) codim $G < \infty$;

(iii) E spazio di Hilbert.

[Suggerimento: si vedano gli esempi nel §II.4 del libro di Brezis.]

[1] Un sottospazio $G \subset E$ si dice di codimensione finita se $\exists N \subset E^{\perp}$ di dimensione finita tale che $G = \{u \in E : \langle f, u\rangle = 0\ \forall\ f \in N\}$