AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2004/2005

APPELLO C

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → [ ]

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1			2	3	4			5			6		7	
punti max	3	1	2	5	5	2	2	1	5	3	3	3	4	4	4
punti assegnati															
totale															

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **2** punti ulteriori *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO 1. (1) Sia dato un intero

$$a := a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

scritto in forma decimale (con $0 \leq a_i \leq 9$). Dimostrare che:

$$3 \mid a \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid (a_m + a_{m-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)\,.$$

(2) Negare la seguente proposizione:
"Ogni uomo è sposato con una donna".

(3) Sia $k \in \mathbb{Z}$. Nell'insieme $X := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0,0)\}$ si definisca una relazione ρ_k nella maniera seguente:

$$(a,b)\ \rho_k\ (a',b') \ :\Leftrightarrow\ 2ab' - ka'b = 0\,, \quad \text{presi comunque } (a,b),(a',b') \in X\,.$$

Determinare per quali valori di k la relazione ρ_k risulta essere una relazione di equivalenza.

ESERCIZIO 2. Utilizzando il Principio di Induzione, provare che, per ogni $n \geq 3$, la seguente espressione:

$$4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \ldots + 4 \cdot (n-1) + 4 \cdot n$$

è uguale ad una soltanto tra le seguenti:

(a) $6(n-1)$;
(b) $2n(n+1) - 12$;
(c) $n(n-1) + 16$;
(d) $\frac{n(n+1)}{2} + 6$.

ESERCIZIO 3. Determinare (mod 105) tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3X \equiv 6 \pmod{9} \\ 2X \equiv 6 \pmod{14} \\ X \equiv 6 \pmod{5} \end{cases} .$$

ESERCIZIO 4. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(x) := x^2$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ e sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da $g(y) := 2y + 1$, per ogni $y \in \mathbb{Z}$.

(1) Determinare la formula esplicita che descrive l'applicazione composta $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

(2) Caratterizzare $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ in modo tale che $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

(3) Determinare se $33 \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ e descrivere $(g \circ f)^{-1}(33)$.

ESERCIZIO 5. Sia z un intero fissato, $z \neq 0$. In $\mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione $*$ così definita:

$$a * b := a + b + z \quad \text{presi comunque } a, b \in \mathbb{Z}\,.$$

Verificare se

(1) Verificare se $(\mathbb{Z}, *)$ è oppure non è un gruppo abeliano.

(2) Stabilire se l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita da $\varphi(n) := n(1-z)+(n-1)z$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, verifica oppure non verifica la proprietà:

$$\varphi(n+m) = \varphi(n) * \varphi(m) \quad \text{presi comunque } n, m \in \mathbb{Z}\,.$$

(3) Stabilire se $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, *)$ è oppure non è un isomorfismo di gruppi.

ESERCIZIO 6. Sia $A := \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto degli anelli $(\mathbb{R}, +, \cdot\ )$ e $(\mathbb{Z}, +, \cdot\ )$ (dove per *prodotto diretto* si intende l'insieme prodotto cartesiano munito delle operazioni di somma e prodotto definite componente per componente).

(1) Stabilire se $(A, +, \cdot\ )$ è un anello unitario, se è commutativo, se possiede divisori dello zero, se è un campo.

(2) Sia $B := \{(x, 3y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ $(\subseteq A)$. Stabilire se B è un sottoanello di $(A, +, \cdot\ )$, o/e se B è un ideale di $(A, +, \cdot\ )$.

ESERCIZIO 7. Siano dati $f(X) := -2 + X + 3X^2 + 6X^3$ e $g(X) := -5 + 7X + 6X^2$ due polinomi in $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$.

(1) Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, calcolare in $\mathbb{Q}[X]$ il polinomio *monico* $d(X) := \mathrm{MCD}(f(X), g(X))$ e determinare due polinomi $\alpha(X),\ \beta(X) \in \mathbb{Q}[X]$ in modo tale che:

$$d(X) = \alpha(X)f(X) + \beta(X)g(X) \qquad \text{[Identità di Bézout in } \mathbb{Q}[X]] \,.$$

(2) Utilizzando il Teorema di Ruffini, determinare tutte le eventuali radici in $\mathbb{Q}$ di $f(X)$ e di $g(X)$.