AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2004/2005
APPELLO X

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → [ ]

Cognome: .... **Nome:** ....

esercizio	1	2		3		4	5				6		7	
punti max	4	2	3	2	3	5	2	4	3	3	4	3	5	4
punti assegnati														
totale														

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **2** punti ulteriori *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO 1. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \quad x \mapsto 2 + 3x\,,$$

e si ponga per induzione $f^n := f \circ f^{n-1}$, per ogni $n \geq 2$ (dove, ovviamente, $f^1 = f$). Provare per induzione su $n \geq 1$ che vale una delle seguenti formule:

(a) $f^n(x) = 2 + 3^{n-1} + 3^n x\,;$
(b) $f^n(x) = (3^n - 1) + 3^n x\,;$
(c) $f^n(x) = (2^n + 1) + 3^n x\,.$

ESERCIZIO 2. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad a + ib \mapsto a^2 + iab\,,$$

(1) Mostrare con degli esempi che f non è un'applicazione iniettiva né suriettiva.
(2) Descrivere la relazione di equivalenza "nucleo di f", definita su $\mathbb{C}$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la proposizione:

$\mathbf{R}$ = *"Soltanto se un triangolo è isoscele, esso è equilatero"*.

(1) Sia $\mathbf{P}$ = *"un triangolo è isoscele"* e sia $\mathbf{Q}$ = *"un triangolo è equilatero"*. Scrivere la proposizione $\mathbf{R}$ in modo equivalente utilizzando soltanto i simboli:

$$\mathbf{P}\ ,\quad \mathbf{Q}\ ,\quad \Rightarrow .$$

(2) Negare la proposizione $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO 4. Determinare (mod 99) tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X - 1 \equiv -X + 3 \pmod{11} \\ 8X - 7 \equiv X + 1 \pmod{9}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. Sia $K := (\mathbb{Z}/\equiv_3, +, \cdot)$ il campo delle classi resto degli interi mod 3 e sia $K^* := K \setminus \{[0]_3\}$.

Nell'insieme prodotto cartesiano $G := K^* \times K$ si consideri l'operazione così definita:

$$(a, b) \bullet (c, d) := (ac, ad + bc^{-1}) \quad \text{presi comunque } a, c \in K^*, b, d \in K\,.$$

(1) Stabilire se in G esiste un elemento neutro rispetto all'operazione $\bullet$.

(2) Stabilire se ogni elemento di G, rispetto all'operazione $\bullet$, possiede un inverso.

(3) Stabilire se $(G, \bullet)$ verifica la proprietà commutativa (cioè stabilire se $(a, b) \bullet (c, d) = (c, d) \bullet (a, b)$, presi comunque $a, c \in K^*, b, d \in K$).

(4) Stabilire se $(G, \bullet)$ è un gruppo abeliano.

ESERCIZIO 6. Sia $A := (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ l'anello degli interi, sia $B := (\mathbb{Z}/\equiv_8, +, \cdot)$ l'anello delle classi resto $\bmod 8$ e sia $\varphi : A \to B$ l'omomorfismo canonico (definito da $\varphi(x) := [x]_8$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$).

(1) Dimostrare che se J è un ideale di B allora $\varphi^{-1}(J)$ è un ideale di A.

(2) Stabilire se l'insieme $H := \{[0]_8, [4]_8\}$ forma un ideale di B. Determinare esplicitamente gli elementi di A che appartengono a $\varphi^{-1}(H)$ e stabilire se $\varphi^{-1}(H)$ forma un ideale di A.

ESERCIZIO 7. Siano dati $f(X) := -6 + 13X - 15X^2 + 6X^3$ e $g(X) := -6 - 5X + 6X^2$ due polinomi in $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$.

(1) Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, calcolare in $\mathbb{Q}[X]$ il polinomio *monico* $d(X) := \mathrm{MCD}(f(X), g(X))$ e determinare due polinomi $\alpha(X),\ \beta(X) \in \mathbb{Q}[X]$ in modo tale che:

$$d(X) = \alpha(X)f(X) + \beta(X)g(X) \qquad \text{[Identità di Bézout in } \mathbb{Q}[X]] \,.$$

(2) Utilizzando il Teorema di Ruffini, determinare tutte le eventuali radici in $\mathbb{Q}$ di $f(X)$ e di $g(X)$.