AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2004/2005

APPELLO B

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) $\rightarrow$ ____________________

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1			2			3	4			5		6		7		
punti max	2	2	2	4	4	3	5	4	3	6	4	5	3	4	2	2	4
punti assegnati																	
totale																	

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **2** punti ulteriori *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $f(x) := x|x|$.

(a) Stabilire se f è un'applicazione iniettiva o/e suriettiva.

(b) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da:

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{if } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{if } x < 0 \end{cases} .$$

Stabilire se $f = g$ oppure se $f \neq g$.

(c) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da:

$$h(y) := \begin{cases} \sqrt{y} & \text{if } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{if } y < 0 \end{cases} .$$

Descrivere le applicazioni $h \circ f$ e $f \circ h$.

ESERCIZIO 2. (1) Tre coetanei Ada, Bruno e Chiara, sono incerti se andare al cinema. E' noto che:

– *condizione necessaria perché Bruno vada al cinema è che ci vada Ada;*

– *condizione sufficiente perché Bruno vada al cinema è che non ci vada Chiara.*

Dedurre dalle informazioni precedenti una delle affermazioni seguenti:

Se Ada non va al cinema, allora:

(a) *Bruno e Chiara vanno al cinema;*
(b) *non vanno al cinema nè Bruno nè Chiara;*
(c) *Chiara va al cinema e Bruno no;*
(d) *Bruno va al cinema e Chiara no;*
(e) *le informazioni date sono contraddittorie;*
(f) *nessuna delle affermazioni precedenti è valida.*

(2) Siano $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ tre proposizioni. Descrivere le tabelle della verità delle seguenti proposizioni:

(a) $(\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{P}) \wedge (\neg \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{Q})$.
(b) $\neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}$.

(3) Sia $\boldsymbol{S} := ((\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{P}) \wedge (\neg \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{Q}))$ e sia $\boldsymbol{T} := (\neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})$. Stabilire se $\boldsymbol{S} \Rightarrow \boldsymbol{T}$ è o non è una tautologia.

ESERCIZIO 3. Determinare (mod 385) tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 4 \pmod{5} \\ 3X \equiv 0 \pmod{11} \\ 4X \equiv 0 \pmod{14} \end{cases} .$$

ESERCIZIO 4. Sia $(G, \ \cdot)$ un gruppo moltiplicativo e siano Sia $H, \ K$ due sottogruppi di G.

(1) Dimostrare che $(H \cap K, \ \cdot)$ è un sottogruppo di $(G, \ \cdot)$.

(2) Mostrare (con un controesempio esplicito) che $(H \cup K, \ \cdot)$ non è in generale un sottogruppo di $(G, \ \cdot)$.

(3) Siano dati i seguenti due sottogruppi $6\mathbb{Z}$ e $15\mathbb{Z}$ del gruppo abeliano additivo $(\mathbb{Z}, +)$. Determinare esplicitamente in $(\mathbb{Z}, +)$:
(a) il sottogruppo $6\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z}$ (cioè, determinare un intero $x \in \mathbb{Z}$ tale che $6\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z} = x\mathbb{Z}$),
(b) il sottogruppo generato da $6\mathbb{Z} \cup 15\mathbb{Z}$ (cioè, determinare un intero $y \in \mathbb{Z}$ tale che $\langle 6\mathbb{Z} \cup 15\mathbb{Z} \rangle = y\mathbb{Z}$).

ESERCIZIO 5. Sia R l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}\,.$$

(1) Mostrare che $(R, +, \cdot\ )$ è un sottoanello dell'anello delle matrici quadrate 2×2 ad entrate in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (cioè, $(\boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), +, \cdot))$.

(2) Stabilire se $(R, +, \cdot)$ è un campo.

ESERCIZIO 6. Siano dati $f(X) := 6X^3+3X^2+7X-5$ e $g(X) := 6X^2+7X-5$ due polinomi in $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$.

(1) Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, calcolare in $\mathbb{Q}[X]$ il polinomio *monico* $d(X) := \mathrm{MCD}(f(X), g(X))$ e determinare due polinomi $\alpha(X)$, $\beta(X) \in \mathbb{Q}[X]$ in modo tale che:

$$d(X) = \alpha(X)f(X) + \beta(X)g(X) \qquad \text{[Identità di Bézout in } \mathbb{Q}[X]] \,.$$

(2) Utilizzando il Teorema di Ruffini, determinare tutte le eventuali radici in $\mathbb{Q}$ di $f(X)$ e di $g(X)$.

ESERCIZIO 7. Siano date le seguenti permutazioni:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{S}_7 .$$

(1) Scrivere σ e τ come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine di σ e di τ.
(3) Calcolare $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$ e determinarne l'ordine.