Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 7 - Andrea Cova (17 Novembre 2004)

1. Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:
   a) □ ≡ 1 (mod 3)
      □ ≡ 2 (mod 5)
      □ ≡ 3 (mod 7)
   b) □ ≡ 5 (mod 6)
      □ ≡ 2 (mod 5)
      □ ≡ 1 (mod 11)
2. Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:
   a) 3 □ ≡ 1 (mod 10)
      4 □ ≡ 2 (mod 7)
   b) 3 □ ≡ 2 (mod 4)
      2 □ ≡ 7 (mod 15)
      4 □ ≡ 6 (mod 7)
3. Risolvere i seguenti sistemi di congruenze lineari:
   3 □ ≡ 15 (mod 21)
   44 □ ≡ 20 (mod 12)
   6 □ ≡ 21 (mod 15)

   2 □ ≡ 5 (mod 3)
   21 □ ≡ 14 (mod 35)
   4 □ ≡ 12 (mod 14)
4. Stabilire se i seguenti numeri sono primi:
   167, 253, 137, 151, 1001
5. Si considerino le seguenti applicazioni. Determinare quali tra esse sono suriettive, quali iniettive e quali biettive. Definire per ciascuna di quelle suriettive (risp., iniettive; biettive) un'applicazione f" inversa a destra (risp., un'applicazione f" inversa a sinistra; l'applicazione inversa f").
   (a) f : ℕ □ ℕ, x □ x^2;
   (b) f : ℤ □ ℤ, x □ x^2;
   (c) f : ℝ □ ℝ, x □ x^3;
   (d) f : ℝ □ ℝ, x □ 2x+3;
   (e) f : ℝ □ ℝ, x □ sen x;
   (f) f : ℝ □ ℤ x [0, 1), x □ ([x], x – [x]);
   (g) f : ℝ □ ℝ, x □ |x|;
   (h) f : ℝ □ ℝ, x □ |x| x;
   (i) f : ℝ □ ℝ, x □ $|x| x^2$;
   (j) f : ℝ □ ℝ, x □ $1/(1+ x^2)$;
   (k) f : ℕ □ ℕ, con f(x): = x/2 se x è pari, f(x): =(x+1)/2 se x è dispari.
6. Data un'applicazione f : □ □ □ si definisca una relazione □ : = (□; R) ponendo R : = {(x, f(x)) : x □ □}. (Si noti che R non è altro che il grafico di f).
   Mostrare che:
   (a) □ è riflessiva □ f = id_x;
   (b) □ è simmetrica □ f ° f = id_x; (cioè, f è biettiva con f^{-1} = f);
   (c) □ è transitiva □ f ° f = f;
   (d) □ è antisimmetrica □ (x punto fisso di f ° f □ x punto fisso di f).
7. Siano f : □ □ □ e g: □ □ □ due applicazioni. Mostrare che:
   (a) f, g iniettive (risp., suriettive; biettive) □ g ° f iniettiva (risp., suriettiva; biettiva);
   (b) g ° f : □ □ Z iniettiva (risp., suriettiva) □ f iniettiva (risp., g suriettiva).
   Mostrare con degli esempi che le affermazioni reciproche di (a) e (b) non sono valide.