Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica a.a. 2004/2005
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 11 - Andrea Cova, Alessandro Russo (15 dicembre 2004)

1. (1) Mostrare che l'insieme prodotto cartesiano G := **Z** x **Q** con l'operazione * definita nella maniera seguente:

$$(a, b) * (x, y) := (a + x, 2^x b + y) \quad \forall\ (a, b), (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Q},$$

forma un gruppo.
(2) Stabilire se (G, *) è un gruppo abeliano.
(3) Sia H := **Z** x **Z**. Stabilire se (H, *) è un sottogruppo di (G, *).

2. Sia t ∈ **R**. Sia *M* (t) l'insieme delle matrici del tipo seguente: $\begin{matrix} a + b & b \\ tb & a \end{matrix}$, con a, b ∈ **R**.

(1) Mostrare che, per ogni t∈ **R**, (*M* (t), +,) è un sottoanello dell'anello delle matrici ($M_{2,2}$,(**R**),+,)
(2) Stabilire se, per ogni t ∈ **R**, (*M* (t), +,) è un anello commutativo e se, per ogni t ∈ **R**, è un anello unitario
(3) Si prenda t = -1. Stabilire se ogni elemento non nullo di (*M*(-1),+,) è invertibile (in (*M*(-1),+,)).

3. Sia G l'insieme delle matrici del tipo seguente: $\begin{matrix} 1 - a & -a \\ a & 1 + a \end{matrix}$, con a ∈ **Z**
(1) Mostrare che (G,) è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo di matrici SL(2, **Z**) :={A ∈ $M_{2,2}$(**Z**) | det(A) = 1}
(2) Stabilire se l'applicazione da (**Z**,+) a (G,) definita da

$$a \rightarrow \begin{matrix} 1 - a & -a \\ a & 1 + a \end{matrix}$$

definisce un isomorfismo tra gruppi.

4. Sia R={h/(2K+1) : h, k∈ **Z**}; si domanda: i) R è un sottoanello di **Q**? ii) R è un campo?

5. Sia G un gruppo finito; dimostrare che l'applicazione φ di G in G tale che $\varphi(x)=x^2$ è un automorfismo di G se, e solo se, G è abelliano e non contiene elementi x, diversi dall'unità, tali che x^2=u.

6. Dimostrare che, il sottoinsieme di **C**, **Z**[i]={a+bi |a, b ∈ **Z**}, è un anello (commutativo unitario). Tale anello si chiama l'anello degli interi di Gauss.

7. Sia G un gruppo abeliano, n un fissato intero positivo ed

$$f : G \rightarrow G \text{ l'applicazione definita da } f(x) = x^n$$

Dimostrare che:
(a) f è un omomorfismo;
(b) se G è un gruppo finito di ordine m e MCD(n, m) = 1, allora f è un automorfismo (cioè è un omomorfismo biiettivo)

8. Sia f : G → G' un omomorfismo di gruppi e H un sottogruppo di G. Mostrare che:
(a) f(H) è un sottogruppo di G';
(b) Ker(f) ∩ H è un sottogruppo normale di H;
(c) H/(Ker(f) ∩ H) è isomorfo a f(H);
(d) se H ha ordine finito, allora l'ordine di f(H) divide l'ordine di H;
(e) per ogni a in G di ordine finito, l'ordine di f(a) divide l'ordine di a.