Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
AL 1
Esercizi per casa, IV prova

Consegnare entro lunedì 13 dicembre.

1. Determinare se le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive o biiettive, e di ciascuna determinare l'immagine:

(a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \mathrm{MCD}(n, 30)$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3/3$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (xy, x - y)$.

2. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, l'applicazione definita da $x \to \frac{ax+b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$. Determinare per quali valori di a, b e c l'applicazione f è biiettiva e, per tali valori, descrivere esplicitamente l'applicazione inversa di f.

3. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $n \mapsto \cos \frac{2n\pi}{7} + i \sin \frac{2n\pi}{7}$ (dove $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

(i) Determinare se f è iniettiva.

(ii) Determinare l'immagine di f.

(iii) Determinare la relazione (di equivalenza) nucleo κ_f di f (definita da $m \, \kappa_f \, n \Leftrightarrow f(m) = f(n)$).

(iv) Determinare l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\kappa_f$.

(v) Descrivere esplicitamente la biiezione canonica $f^{\#} : \mathbb{Z}/\kappa_f \to \mathrm{Im}(f)$.

(vi) Dimostrare che f è un omomorfismo dal gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ al gruppo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

(vi) Dimostrare che l'immagine di f è un sottogruppo di $\mathbb{C}^*$.

(vii) Dimostrare che $f^{\#}$ è un isomorfismo di gruppi.

4. Determinare se $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'operazione $*$ definita da $a * b = a + b - 7$, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.