Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL1 - Algebra 1
Tutorato 12
Martedì 21 dicembre 2004

1. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Q}[X]$:
   (a) 5 divide $7X$;
   (b) $X - 5$ divide $X^2 - \frac{24}{5}X - 1$;
   (c) 9 divide $11X$;
   (d) $X - 3$ divide $X^2 - \frac{7}{3}X - 2$;
   (e) $5X$ divide X^2.

2. In $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Q}[X]$, stabilire se:
   (a) 1327981 è un MCD di $3X + 1$ e $5X$;
   (b) $13X$ è un MCD di $13X^2$ e X;
   (c) $X - 2$ è un MCD di $X^3 + 2X^2 - X - 2$ e $X^3 - 8$;
   (d) 964 è un MCD di $5X + 16$ e $9X$;
   (e) $21X$ è un MCD di $21X^2$ e X;
   (f) $X - 1$ è un MCD di $X^3 - X^2 + 3X - 3$ e $X^3 - 1$;
   (g) X è un MCD di $18X^3$ e $2X$.

3. Studiare la riducibilità in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$ dei seguenti polinomi e scrivere la loro decomposizione in fattori irriducibili:
   $$10X^2 - 2, \quad 3X + 18, \quad X^4 - 121, \quad X^3 - 2X^2 + 3X - 6, \quad 216X^2 - 2.$$

4. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive determinare il MCD e almeno due identità di Bézout delle seguenti coppie di polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}[X]$:
   (a) $f(X) := X^5 - 2X^4 + 3X - 6$, $g(X) := X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2$;
   (b) $f(X) := X^3 + 4X^2 - 3X - 18$, $g(X) := X^2 - X - 2$;

5. Determinare, se esistono, le radici multiple dei seguenti polinomi:
   (a) $X^5 - 4X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X + 2$;
   (b) $X^4 + 6X^2 + 9$;
   (c) $X^4 - X^3 + X^2 + 1$.

6. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Z}_{11}[X]$:
   (a) $\overline{3}X^2 + \overline{7}X + \overline{2}$;
   (b) $X^3 + \overline{10}X^2 + \overline{10}X + \overline{9}$;
   (c) $X^4 + \overline{2}X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{2}X + \overline{1}$.

7. Costruire almeno due polinomi in $\mathbb{Z}_3[X]$ tali che:
   (a) $f(\overline{0}) = \overline{0}$, $f(\overline{1}) = \overline{1}$, $f(\overline{2}) = \overline{2}$;
   (b) $f(\overline{0}) = \overline{2}$, $f(\overline{1}) = \overline{1}$, $f(\overline{2}) = \overline{2}$.