

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005**  
**AL1 - Algebra 1**  
**Tutorato 6**  
Mercoledì 10 novembre 2004

1. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod{6} \\ X \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

2. Determinare le eventuali soluzioni  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq x \leq 60$ , del sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} X \equiv 2 \pmod{3} \\ X \equiv 1 \pmod{5} \\ X \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

3. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} X \equiv 5 \pmod{7} \\ 11X \equiv 5 \pmod{3} \\ 2X \equiv 7 \pmod{5} \end{cases}$$

4. (a) Trovare il resto della divisione per 9 di  $74^{6h}$ , al variare di  $h \in \mathbb{N}$ ;  
(b) Trovare il resto delle seguenti divisioni  
i.  $43816^{20321}$  diviso 10;  
ii.  $57432^{1142}$  diviso 9;  
iii.  $89741^{527}$  diviso 3;  
(c) Si determinino le ultime due cifre del numero  $302^{46}$  e del numero  $7^{506}$ ;  
(d) Si calcoli il *MCD* delle seguenti coppie di numeri:

$$MCD(4096, 13456791245321), \quad MCD(1296, 3422573248525122).$$

5. Stabilire se i seguenti numeri sono primi:

$$119, \quad 143, \quad 97, \quad 247, \quad 899.$$

Determinare inoltre l'inverso di 2 modulo  $p$ ,  $\forall p$  primo, precedentemente ottenuto nella fattorizzazione degli interi assegnati.

6. Determinare per ognuna delle seguenti relazioni quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono soddisfatte.

- (a) Relazioni su  $\mathbb{Z}$ :

- i.  $x\rho y \Leftrightarrow xy \geq 0$ ;  
ii.  $x\rho y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Q}^*$  tale che  $x = y^k$ ;

- (b) Relazioni su  $\mathbb{Q}$ :

- i.  $x\rho y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^*$  tale che  $x = y^k$ ;

ii.  $x\rho y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$  tale che  $x - y = 13k$ ;

(c) Relazioni su  $\mathbb{R}$ :

i.  $x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$ ;

ii.  $x\rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ .

Per ognuna delle relazioni che sia una relazione d'equivalenza, determinare l'insieme quoziente.