AL3 Fondamenti di Algebra Commutativa
A.A. 2005/2006

Prof. Marco Fontana

1. Ideali

Operazioni tra ideali. Omomorfismi di anelli e anelli quoziente. Il Lemma di Zorn. Ideali primi e massimali. Sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi. Sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi saturati. Teorema di Krull-Zorn. L'insieme degli zero-divisori è una unione di ideali primi. Ideali primi minimali. Un dominio è un UFD se e soltanto se ogni ideale primo non nullo contiene un elemento primo. Ideali coprimi. Il Teorema Cinese dei Resti per gli anelli e collegamenti con la formulazione classica in $\mathbb{Z}$. Radicale di un ideale, nilradicale e radicale di Jacobson. Anelli locali.

2. Anelli di Frazioni

Anelli e moduli di frazioni. Anello totale delle frazioni. Anelli locali. Localizzazione e sua proprietà di universalità. Il Lemma di Nakayama (varie formulazioni). Esattezza della localizzazione. Proprietà locali. Estensione e contrazione di ideali. Ideali primi e primari in anelli di frazioni.

3. Moduli

Moduli e sottomoduli. Operazioni tra sottomoduli. Omomorfismi e moduli quoziente. Generatori e basi. Prodotti diretti e somme dirette esterne di moduli. Proprietà universali. Somme dirette interne. Moduli liberi. Caratterizzazioni dei moduli liberi. Moduli di torsione. Omomorfismi di moduli liberi. Invarianza della dimensione di un modulo libero (cenni). Algebre. Algebre finite e finitamente generate. Successioni esatte e successioni esatte corte. Lemma del “serpente” (cenni). Prodotto tensoriale di anelli e proprietà di universalità. Esempi. Prodotto tensoriale di moduli e di algebre (cenni).

4. Lo Spettro di un Anello e la Topologia di Zariski

Chiusi e base di aperti nello spettro primo di un anello. Topologia di Zariski e prime proprietà. Esempi: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Spec}(k[X])$, $\mathrm{Spec}(k[X_1, X_2, ...X_n])$ (dove k è un campo, algebricamente chiuso o non). Quasi-compattezza di $\mathrm{Spec}(A)$ e proprietà di separazione. Applicazioni spettrali continue, aperte o chiuse $f^a : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, associate ad omomorfismi di anelli $f : A \to B$. Spettro di una localizzazione $\mathrm{Spec}(A_P)$, spettro del campo residuo in un primo $\mathrm{Spec}(\mathbf{k}(P))$ e fibre di applicazioni spettrali.

5. Anelli e Moduli Noetheriani

Condizione della catena ascendente e proprietà equivalenti. Condizione della catena discendente e proprietà equivalente. Moduli e anelli noetheriani e artiniani. Passaggio della noetherianità ai quozienti e agli anelli di frazioni. Moduli e algebre su anelli noetheriani. Il Teorema della Base ("BasisSatz") di Hilbert.

Decomposizione primaria di ideali. Primi associati. Componenti isolate e componenti immerse. Teoremi di unicità (cenni).

Ideali irriducibili. Decomposizione primaria in anelli noetheriani. Lemma di normalizzazione di Noether (cenni). Il Teorema degli zeri ("NullstellenSatz") di Hilbert: formulazioni "debole" e "forte". Interpretazione e conseguenze nell'ambito della geometria algebrica affine.

6. Dipendenza Integrale

Dipendenza integrale: condizioni equivalenti. Esempi. Transitività della dipendenza integrale. Chiusura integrale e sue proprietà: comportamento nel passaggio ai quozienti e agli anelli di frazioni. Dimensione della chiusura integrale: "Lying over", Incomparabilità, "Going-Up" e "Going-Down" di Cohen.

7. Anelli di Valutazione

Domini di valutazione; esempi e loro prime proprietà. Il Teorema di Krull sulla chiusura integrale. Domini di valutazione discreta. Valutazioni discrete e valutazioni p-adiche.

8. Domini di Dedekind

Ideali frazionari. Ideali frazionari invertibili. Domini di Dedekind e loro caratterizzazioni. Fattorizzazione degli ideali nei domini di Dedekind (cenni).

Testi consigliati

[1] M. F. ATIYAH, I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, (1969).
[2] I. KAPLANSKY, *Commutative Rings*. Polygonal, (1994).
[3] H. LI, *An Introduction to Commutative Algebra from the viewpoint of normalization*. World Scientific, (2004).
[4] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, (1994).

Bibliografia supplementare

[5] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative*. Hermann, (1961-...).
[6] D. EISENBUD, *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*. Springer, (1995).
[7] R. Y. SHARP, *Steps in Commutative Algebra*. London Mathematical Society Student Texts, 51, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
[8] O. ZARISKI, P. SAMUEL, *Commutative Algebra, Vol. I, II*. Springer (ristampa dell'edizione 1958-1960), (1979).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	□ NO

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziale (seminari e prova scritta) accedono direttamente al colloquio di verbalizzazione del voto proposto dal docente, da effettuarsi durante la I Sessione di esame (Appello **A** o **B**).

Per tutti gli studenti che non si avvalgono della possibilità della valutazione del profitto durante il corso, l'esame finale consiste in una prova orale o/e scritta (comprendente anche domande di tipo teorico).

Gli studenti che non hanno frequentato il corso debbono prenotarsi almeno 10 giorni prima dell'appello d'esame, contattando il docente nell'orario di ricevimento.