Capitolo 10

Globalizzazione della nozione di valutazione

Definizione 10.1. Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Un sotto-D-modulo $\mathcal{A}$ di K si dice *ideale frazionario* di D se esiste $x \in D^*$ tale che $x\mathcal{A} \subseteq D$.

Osservazioni 10.2. 1. Ogni ideale di D è un ideale frazionario e viene chiamato anche ideale (frazionario) intero.

2. Sia $\mathcal{A}$ un ideale frazionario di D; poiché $x\mathcal{A} \subseteq D$, per qualche $x \in D^*$, allora $\mathfrak{a} = x\mathcal{A}$ è un ideale di D. Dunque $\mathcal{A}$ è un ideale frazionario di D se, e soltanto se, $\mathcal{A} = x^{-1}\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a}$ ideale di D e $x^{-1} \in K$.

Definizione 10.3. Dato un ideale frazionario $\mathcal{A}$ di D, $\mathcal{A} \neq 0$, allora:

$$\mathcal{A}^{-1} := (D : \mathcal{A}) := \{z \in K \,|\, z\mathcal{A} \subseteq D\}$$

è un ideale frazionario di D (verifica immediata) detto *ideale frazionario inverso di* $\mathcal{A}$. Inoltre $\mathcal{A}$ si dice *invertibile* se $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = D$.

Osservazioni 10.4. (a) Ogni ideale principale non zero è invertibile (i.e., se $\mathcal{A} := aD$ con $a \neq 0$ allora $\mathcal{A}^{-1} = a^{-1}D$).

(b) Per ogni ideale frazionario $\mathcal{A} \neq 0$, si ha $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} \subseteq D$.

(c) Se $\mathcal{A} = 0$, allora ovviamente:

$$(D : (0)) := \{z \in K \,|\, z \cdot 0 \in D\} = K.$$

Viceversa, se $D \neq K$, allora:

$$(D : K) := \{z \in K \,|\, z \cdot K \in D\} = (0).$$

Infatti se T è un *sopraanello* di D, cioè un sottoanello di K contenente D come sottoanello, allora: $(D : T) := \{z \in K \,|\, z \cdot T \in D\}$ è un ideale di D, detto il *conduttore di T in D* ed è il più grande ideale di D che resta un ideale anche in T. Le verifiche che $(D : T) \subseteq D$ e che $(D : T)$ è un ideale di D e di T sono dirette e non presentano difficoltà. Se poi $\mathfrak{a}$ è un ideale di D

tale che $\mathfrak{a}T \subseteq \mathfrak{a}$, allora chiaramente $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : T) \subseteq (D : T)$.
In particolare, se $T = K$ (e se $D \neq K$), allora chiaramente $(D : K) = (0)$. Un sopraanello T di D è un ideale frazionario di D se e soltanto se il conduttore $(D : T)$ è un ideale non nullo di D. Da quanto sopra segue che se $D \neq K$, allora K non è mai un ideale frazionario di D.

(d) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due ideali frazionari di D allora si può considerare

$$(\mathcal{A} : \mathcal{B}) := \{z \in K \,|\, z\mathcal{B} \in \mathcal{A}\}$$

e questo è ancora un ideale frazionario di D; inoltre $\mathcal{B} \cdot (\mathcal{A} : \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$.

Proposizione 10.5. *Ogni ideale (frazionario) invertibile è finitamente generato.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{A}$ è invertibile, allora esiste $\mathcal{A}^{-1}$ e $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = D$, quindi $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ con $a_i \in \mathcal{A}$ e $b_i \in \mathcal{A}^{-1}$. Dato comunque $x \in \mathcal{A}$, allora $x = x \cdot 1 = x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(xb_i)$, con $xb_i \in D$. Da cui $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$. □

Proposizione 10.6. *Ogni ideale (frazionario) invertibile $\mathcal{A}$ in un dominio locale $(D, \mathfrak{m})$ è principale.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{A}$ è principale non c'è nulla da dimostrare (cfr. Osservazioni 10.4). Supponiamo dunque $\mathcal{A}$ invertibile e mostriamo che $\mathcal{A}$ è principale. Per l'Osservazione 10.2 (a), possiamo ridurci a dimostrare l'asserto per $\mathfrak{a}$ ideale di D. Per la Proposizione 10.5 $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathfrak{m}$, dunque $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ con $b_i \in \mathfrak{a}^{-1}$. A meno di riordinare i termini di tale somma possiamo supporre $a_1 b_1 \in D \setminus \mathfrak{m} = \mathcal{U}(D)$ (non tutti i termini possono essere in $\mathfrak{m}$, altrimenti $1 \in \mathfrak{m}$), allora $(a_1, \dots, a_n) = (a_1) = a_1 D$, infatti per ogni $i = 2, \dots, n$, $a_i = a_i a_1 b_1 (a_1 b_1)^{-1} = a_1 (a_i b_1)(a_1 b_1)^{-1} \in a_1 D$. □

Proposizione 10.7. *Sia D un dominio semilocale. Allora ogni ideale invertibile è principale.*

Dimostrazione.
Non è restrittivo ridurci a dimostrare l'asserto per un ideale intero invertibile $\mathfrak{a}$ di D. Sia $\mathrm{Max}(D) := \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$. Poiché $\mathfrak{a}$ è invertibile per ipotesi, esistono $a_i \in \mathfrak{a}$ e $b_i \in \mathfrak{a}^{-1}$ tali che $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Per ogni $j = 1, \dots, r$, a meno di riordinare i termini, possiamo supporre $a_j b_j \notin \mathfrak{m}_j$ (altrimenti $1 \in \mathfrak{m}_j$) e $\mathfrak{m}_j \not\supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{j-1} \cap \mathfrak{m}_{j+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_{j-1} \mathfrak{m}_{j+1} \cdots \mathfrak{m}_r$, altrimenti essendo $\mathfrak{m}_j$ massimale (e dunque primo) conterrebbe $\mathfrak{m}_i$ per un qualche $i \neq j$, il che è assurdo.
Per ogni j sia dunque $y_j \in (\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{j-1} \cap \mathfrak{m}_{j+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r) \setminus \mathfrak{m}_j$ e poniamo $b := y_1 b_1 + \cdots + y_r b_r$. $b \in \mathfrak{a}^{-1}$ e $\mathfrak{b} := b\mathfrak{a}$ è un ideal di D. Facciamo vedere che necessariamente $\mathfrak{b} = D$, da cui seguirà $\mathfrak{a} = b^{-1} D$.
Supponiamo, per assurdo, che $\mathfrak{b}$ sia contenuto in un ideale massimale di D, per semplicità supponiamo $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}_1$. $ba_1 \in \mathfrak{b} \Rightarrow ba_1 \in \mathfrak{m}_1$, ovvero $y_1 b_1 a_1 + \cdots + y_r b_r a_1 = ba_1 \in \mathfrak{m}_1$. Per costruzione, $y_i b_i a_1 \in \mathfrak{m}_1$ per ogni $i \neq 1$ quindi $a_1 b_1 y_1 = ba_1 - a_1 y_2 b_2 - \cdots - a_1 y_r b_r \in \mathfrak{m}_1$, il che è assurdo. □

Proposizione 10.8. *Sia D un dominio integro e sia $\mathcal{A}$ un ideale invertibile di D, allora $\mathcal{A}_S := S^{-1}\mathcal{A}$ è invertibile in D_S per ogni S parte moltiplicativa di D.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che se $\mathcal{A}$ è un ideale frazionario finitamente generato allora

$$(D : \mathcal{A})_S = (D_S : \mathcal{A}_S).$$

Inoltre se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono due ideali frazionari di D allora è subito visto che:

$$S^{-1}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (S^{-1}\mathcal{B})(S^{-1}\mathcal{C}).$$

□

Proposizione 10.9. *Sia D un dominio e sia $\mathcal{A}$ un ideale frazionario di D finitamente generato. Allora $\mathcal{A}$ è invertibile se, e soltanto se, $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}} := \mathcal{A}D_{\mathfrak{m}}$ è principale per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di D.*

Dimostrazione.
($\Rightarrow$). Se $\mathcal{A}$ è invertibile allora $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ è invertibile in un dominio locale, quindi è principale per la Proposizione 10.6.
($\Leftarrow$). Supponiamo che ogni $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ sia principale. Se $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} \neq D$, allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ che lo contiene. Per ipotesi $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ è principale in $D_{\mathfrak{m}}$ e sarà generato da un certo elemento x di $\mathcal{A}$. Siano $a_1, \ldots, a_n$ i generatori di $\mathcal{A}$, quindi $s_j a_j \in (x)$ per qualche $s_1, \cdots, s_n \in D \setminus \mathfrak{m}$. Sia ora $s = s_1 \ldots s_n$, allora $sx^{-1} \in (D : \mathcal{A})$ da cui: $s = sx^{-1}x \in \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$. Pertanto, arriviamo ad una contraddizione. □

Definizione 10.10. Un dominio si dice un *dominio di Bézout* (rispettivamente, un *dominio di Prüfer*) se ogni suo ideale (frazionario) non nullo e finitamente generato è principale (rispettivamente, ogni ideale frazionario non nullo è invertibile).

È immediato che un dominio a ideali principali è un dominio di Bézout e che un dominio di Bézout è un dominio di Prüfer.

Proposizione 10.11. *Un dominio di valutazione D è un dominio di Bézout.*

Dimostrazione. È noto che in un dominio di valutazione ogni ideale generato da due elementi deve essere principale (e generato da uno di questi). Infatti, dati $a, b \in D$ allora $(a) \subsetneq (b)$ oppure $(b) \subseteq (a)$ (in altre parole $(a, b) = (b)$, oppure $(a, b) = (a)$). Per induzione sul numero dei generatori, si vede facilmente che in un anello di valutazione ogni ideale finitamente generato è principale. □

Teorema 10.12. *Sia $D = (D, \mathfrak{m})$ un dominio locale, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *D è di Prüfer;*

(b) *D è di Bézout;*

(c) *D è di valutazione.*

Dimostrazione. Chiaramente (c)⇒(b)⇒(a), facciamo dunque vedere che un dominio di Prüfer locale è di valutazione.
(a)⇒(c). Siano $0 \neq a, b \in D$ e sia $\mathfrak{a} := (a, b)D$; $\mathfrak{a}$ è finitamente generato in un dominio di Prüfer locale dunque è invertibile e in particolare è principale (D è locale) generato da a oppure da b (cfr. Proposizione 10.6); dunque se $\mathfrak{a} = (a, b)D = aD$ allora $bD \subseteq aD$, altrimenti $\mathfrak{a} = (a, b)D = bD$ e $aD \subseteq bD$, ovvero gli ideali principali di D sono linearmente ordinati, quindi D è di valutazione. □

Teorema 10.13. *Sia D un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *D è di Prüfer;*

(b) *$D_{\mathfrak{p}}$ è di valutazione per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D)$;*

(c) *$D_{\mathfrak{m}}$ è di valutazione per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$.*

Dimostrazione.
(a)⇒(b). Sia $\mathfrak{b}$ un ideale finitamente generato di $D_{\mathfrak{p}}$, allora se $\mathfrak{b} = \left(\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_r}{s_r}\right)$, $s_i \in D \setminus \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}D_{\mathfrak{p}}$. D di Prüfer, allora $\mathfrak{a}$ è invertibile ⇒ $\mathfrak{b}$ è principale in quanto invertibile in un dominio locale, ne segue che $D_{\mathfrak{p}}$ è di Bézout locale ⇒ $D_{\mathfrak{p}}$ di valutazione.
(b)⇒(c). Banale.
(c)⇒(a). Sia $\mathfrak{a} \subseteq D$, $\mathfrak{a} \neq (0)$, finitamente generato, poiché $D_{\mathfrak{m}}$ è di valutazione, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$ è principale, inoltre $D_{\mathfrak{p}} \supseteq D_{\mathfrak{m}}$ per un qualche $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$ ($\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D), \exists \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$ tale che $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, ovvero tale che $D_{\mathfrak{p}} \supseteq D_{\mathfrak{m}}$), dunque anche $D_{\mathfrak{p}}$ è di valutazione e $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ è principale. Per la Proposizione 10.9, $\mathfrak{a}$ è invertibile ⇒ D è di Prüfer. □

Teorema 10.14. *Sia D un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K e sia T un sopraanello di D (ovvero $D \subset T \subseteq K$). Se T è locale, allora $T = D_{\mathfrak{p}}$ per un qualche $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D)$ (in particolare T è un anello di valutazione).*

Dimostrazione. $T = (T, \mathfrak{n})$ per ipotesi. Sia $\mathfrak{p} := \mathfrak{n} \cap D$, allora $D_{\mathfrak{p}} \subseteq T_{\mathfrak{n}} = T$ dunque T è di valutazione. Facciamo vedere che vale ache l'inclusione opposta: supponiamo per assurdo $x \in T \setminus D_{\mathfrak{p}}$ poiché $D_{\mathfrak{p}}$ è di valutazione, $x^{-1} \in \mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{n} \Rightarrow x, x^{-1} \in \mathfrak{n}$, che è assurdo. □

Corollario 10.15. *Sia D un dominio di Prüfer. Ogni sopraanello T di D è ancora un dominio di Prüfer.*

Dimostrazione. Per il precedente Teorema 10.14, $T_{\mathfrak{m}}$ è di valutazione $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(T)$. □

Teorema 10.16. *Sia K un campo ed X un'indeterminata su K. Sia V un anello di valutazione del campo delle funzioni razionali $K(X)$ e supponiamo $K \subseteq V \subsetneq K(X)$. Allora $V = K[X]_{(p)}$ dove p è un polinomio irriducibile di $K[X]$, oppure $V = K[X^{-1}]_{(X^{-1})}$.*

Dimostrazione. Essendo V un anello di valutazione di $K(X)$ allora X oppure X^{-1} appartengono a V.
Se $X \in V$, allora V è un sopraanello locale di $K[X]$ che è un dominio di Prüfer, pertanto $V = K[X]_{\mathfrak{p}}$ per un qualche ideale primo $\mathfrak{p}$ di $K[X]$. Essendo $K[X]$ un dominio ad ideali principali, $\mathfrak{p} = (p)$ per un qualche polinomio irriducibile di

$K[X]$.
Se $X^{-1} \in V$, allora V è un sopraanello locale di $K[X^{-1}]$ e quindi $V = K[X^{-1}]_{\mathfrak{q}}$ per un qualche ideale primo di $K[X^{-1}]$. Poiché $X \notin V$, allora $X^{-1} \in \mathfrak{q}K[X^{-1}]_{\mathfrak{q}}$ e quindi $\mathfrak{q} = (X^{-1})$ essendo X^{-1} irriducibile in $K[X^{-1}]$. □

Corollario 10.17. *Se K è un campo algebricamente chiuso allora l'insieme degli anelli di valutazione di $K(X)$ che contengono K è in corrispondenza biunivoca con i punti di $\mathbb{P}^1_K := K \cup \{\infty\}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che se K è algebricamente chiuso, allora gli ideali primi di K sono tutti del tipo $(X - \alpha)$ per $\alpha \in K$. L'anello di valutazione $K[X^{-1}]_{(X^{-1})}$ si fa corrispondere con il "punto all'infinito" di $\mathbb{P}^1_K$. □

Proposizione 10.18. *Sia D un dominio e $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \subseteq \mathrm{Spec}(D)$. Supponiamo che $\mathfrak{p}_i$ e $\mathfrak{p}_j$ siano inconfrontabili per $1 \leq i \neq j \leq n$ e che $D = D_{\mathfrak{p}_1} \cap \cdots \cap D_{\mathfrak{p}_n}$. Allora $\mathrm{Max}(D) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.*

Per dimostrare il risultato sopra eunciato abbiamo bisogno di un lemma relativo all'inclusione di un ideale in una unione finita di ideali primi.

Lemma 10.19. *Sia $\mathfrak{a}$ un ideale in un anello R (non necessariamente un dominio) e sia $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$. Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$ allora $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_h$ per un qualche h, $1 \leq h \leq n$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n \geq 1$. Il caso $n = 1$ è banale. Per semplicità dimostriamo l'enunciato per $n = 2$. Il caso generale è lasciato per esercizio. Supponiamo che $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2$ e che per assurdo $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_2$. Quindi possiamo trovare $a_1 \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}_1$ e $a_2 \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}_2$ (e dunque $a_1 \in \mathfrak{p}_2$ e $a_2 \in \mathfrak{p}_1$). Sia $z := a_1 + a_2$. Chiaramente $z \in \mathfrak{a}$. Inoltre $z \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2$ (perché se $z, a_2 \in \mathfrak{p}_1$ allora $a_1 = z - a_2 \in \mathfrak{p}_1$ e analogamente $z \notin \mathfrak{p}_2$). Quindi $z \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2$ e otteniamo una contraddizione. □

Dimostrazione della Proposizione 10.18. Sia $x \in D$ ed $x \notin \mathcal{U}(D)$. Allora $x \in \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$. Infatti, se $x \notin \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \mathfrak{p}_n$ allora $x \notin \mathfrak{p}_i$ per ogni i e quindi $x^{-1} \in D_{\mathfrak{p}_i}$ per ogni i; ovvero $x^{-1} \in D$ e ciò contraddice il fatto che $x \notin \mathcal{U}(D)$. Pertanto, preso comunque un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di D, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \mathfrak{p}_n$ e quindi per il Lemma 10.19, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}_h$ per qualche $1 \leq h \leq n$. Dunque, essendo $\mathfrak{m}$ massimale $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_h$. □

Teorema 10.20. *Siano $V_1, \ldots V_n$ anelli di valutazione di uno stesso campo K. Sia*

$$D := V_1 \cap \cdots \cap V_n.$$

Supponiamo che D abbia come campo dei quozienti K. Allora abbiamo le seguenti proprietà:

(1) *Per ogni i, esiste un ideale primo $\mathfrak{p}_i$ di D tale che $V_i = D_{\mathfrak{p}_i}$.*

(2) *D è un dominio di Bézout.*

(3) *Se supponiamo inoltre che V_i e V_j siano inconfrontabili per $1 \leq i \neq j \leq n$, allora $\mathrm{Max}(D) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.*

Cominciamo col dimostrare un lemma.

Lemma 10.21. *Sia R un anello locale. Se $x \in \mathcal{U}(R)$, allora esiste un intero l (dipendente da x) tale che, per ogni intero h con* $\mathrm{MCD}(h,l) = 1$, l'elemento

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{h-1}$$

appartiene anch'esso ad $\mathcal{U}(R)$.

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di R e sia $k := \frac{R}{\mathfrak{m}}$. Poniamo $\overline{x} := x + \mathfrak{m}$. Vogliamo dimostrare che $\overline{1} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}^{h-1} \neq \overline{0}$ in k.
Se $\overline{x} = \overline{1}$ allora basta prendere l uguale alla caratteristica di k, se la caratteristica di k è finita; oppure $l = 1$ se la caratteristica di k è zero.
Se $\overline{x} \neq \overline{1}$, allora osserviamo che:

$$\overline{1} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}^{h-1} = \frac{\overline{1} - \overline{x}^h}{\overline{1} - \overline{x}}.$$

Pertanto, basterà assicurarci che $\overline{x}^h \neq \overline{1}$. Quindi se $\overline{x}$ non è una radice dell'unità, basta prendere $l = 1$. Se invece $\overline{x}$ è una radice dell'unità in k, basta prendere l uguale all'ordine di $\overline{x}$ (come radice dell'unità). $\square$

Dimostrazione del Teorema 10.20. Sia $\mathfrak{m}_i$ l'ideale massimale di V_i e sia $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{m}_i \cap D$, per ogni i, $1 \leq i \leq n$.

(1) È subito visto che $D_{\mathfrak{p}_i} \subseteq V_i$, per ogni i. Per dimostrare il viceversa, limitiamoci per semplicità al caso $i = 1$. Vogliamo dimostrare che dato comunque $x \in V_i$ esiste un elemento $s \in D \setminus \mathfrak{p}_1$ in modo tale che $sx \in D$.
Consideriamo $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ tale che $j \in J$ se x è invertibile in V_j. Per ciascun $j \in J$, possiamo determinare nell'anello V_j un intero l_j con la proprietà descritta nel Lemma 10.21. Sia $l := \prod_{j \in J} l_j$ e sia h un intero, $h \gneq 2$, tale che $\mathrm{MCD}(h,l) = 1$. Allora l'elemento:

$$s := \left(1 + x + \cdots + x^{h-1}\right)^{-1}$$

è invertibile in V_j per ogni $j \in J$. Inoltre per $1 \leq i \leq n$,

(a) se $x \in \mathfrak{m}_i$, allora $1 + x + \cdots + x^{h-1} \in \mathcal{U}(V_j)$ e quindi $s \in \mathcal{U}(V_i)$;

(b) se $x \in \mathcal{U}(V_i)$ allora $i \in J$ e quindi $s \in \mathcal{U}(V_i)$;

(c) se $x \notin V_i$, allora $y := x^{-1} \in \mathfrak{m}_i$ e quindi

$$\frac{y^{h-1}}{1 + y + \cdots + y^{h-1}} = s$$

(infatti $1+y+\cdots+y^{h-1} = \left(1 + x + \cdots + x^{h-1}\right) y^{h-1}$). Pertanto, $y^{h-1} \in \mathfrak{m}_i$, $1 + y + \cdots + y^{h-1} \in \mathcal{U}(V_i)$ e quindi $s \in \mathfrak{m}_i$.

Perciò per ogni i, $1 \leq i \leq n$, $s \in V_i$ e dunque $s \in D$.
Avendo assunto $x \in V_1$, siamo nella situazione (a) o (b), quindi per un tale x, l'elemento $s \in \mathcal{U}(V_1)$ e quindi $s \in D \setminus \mathfrak{p}_1$. Per concludere dobbiamo mostrare che $sx \in D$, ovvero che $sx \in V_i$ per ogni i, $1 \leq i \leq n$.
Per i come nei casi (a) e (b), cioè se $x \in V_i$, allora è ovvio che $sx \in V_i$.

Supponiamo che i sia come nel caso (c), cioè $x \in V_i$. In tal caso, si vede facilmente che

$$sx = \frac{y^{h-2}}{1 + y + \cdots + y^{h-1}}$$

con $y^{h-2} \in \mathfrak{m}_i$ e $1 + y + \cdots + y^{h-1} \in \mathcal{U}(V_i)$. Pertanto anche in tal caso $sx \in V_i$.

(2) Se supponiamo che V_i è inconfrontabile con V_j allora la decomposizione di D è irridondante, cioè

$$D = V_1 \cap \cdots \cap V_n \subsetneq V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} \cap V_{i+1} \cap \cdots \cap V_n$$

per ogni i, $1 \leq i \leq n$. Da ciò discende che $\mathfrak{p}_i$ e $\mathfrak{p}_j$ sono inconfrontabili come ideali di D e quindi l'asserto segue dalla Proposizione 10.18.

(3) Il fatto che D sia un domino di Prüfer discende da (2) e dal Teorema 10.13. Il fatto che un dominio di Prüfer semilocale sia un dominio di Bézout discende dalla Proposizione 10.7. $\square$

Teorema 10.22. *Sia D un dominio. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *ogni ideale frazionario non nullo di D è invertibile;*

(ii) *D è noetheriano e $D_{\mathfrak{m}}$ è un anello di valutazione discreta per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$.*

Dimostrazione.
(i)$\Rightarrow$(ii). Ogni ideale non nullo di D deve essere finitamente generato in quanto invertibile (cfr. Proposizione 10.5) quindi D è noetheriano. Inoltre per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$ e per ogni ideale $\mathfrak{b}$ di $D_{\mathfrak{m}}$ abbiamo che $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}}$ per un qualche ideale $\mathfrak{a}$ di D. Se $\mathfrak{b} \neq 0$ allora anche $\mathfrak{a} \neq 0$ e $\mathfrak{a}$ è invertibile, ne segue che anche $\mathfrak{b}$ è invertibile in $D_{\mathfrak{m}}$ e dunque è principale. Dunque $D_{\mathfrak{m}}$ è un PID locale ovvero è un anello di valutazione discreta.
(ii)$\Rightarrow$(i). Chiaramente ogni ideale frazionario è finitamente generato in quanto D è noetheriano. Inoltre D è di Prüfer perché $D_{\mathfrak{m}}$ è di valutazione per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$, dunque ogni ideale finitamente generato è invertibile. Ne segue che ogni ideale non nullo di D è invertibile. $\square$

Osservazione 10.23. È facile osservare che la condizione (ii) del Teorema 10.22 è equivalente a:
(ii') D è noetheriano e $D_{\mathfrak{m}}$ è un anello di valutazione per ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$.

Definizione 10.24. Un dominio D che verifica le condizioni equivalenti del Teorema 10.22 viene chiamato *dominio di Dedekind*.

È subito visto che vale il seguente diagramma di implicazioni:

$$\begin{tikzcd}
\text{PID} \arrow[r, Rightarrow, "(3)"] \arrow[d, Rightarrow, "(1)"] & \text{Dedekind} \arrow[d, Rightarrow, "(2)"] \\
\text{Bézout} \arrow[r, Rightarrow, "(4)"] & \text{Prüfer}
\end{tikzcd}$$

Si noti che dalle definizioni segue subito che un dominio di Bézout noetheriano è un PID e che un dominio di Prüfer noetheriano è un dominio di Dedekind. Tuttavia, in generale, nessuna delle precedenti implicazioni si inverte.

Esempi 10.25. (a) (3) e (4) non si invertono: basta prendere (nel caso noetheriano) un dominio di Dedekind che non è un PID. Ad esempio $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, essendo la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, è un dominio di Dedekind, ma non è principale (ad esempio l'ideale $(2, 1+\sqrt{-5})$ non è principale in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ perché dovrebbe essere generato da un elemento di norma 2 che non è possibile avere).

(b) (1) e (2) non si invertono: basta prendere un dominio di Bézout che non è un PID. Un anello di valutazione non discreta fornisce un esempio di tale tipo.