Capitolo 11

Superficie di Riemann astratte associate a campi di funzioni algebriche in una variabile

Definizione 11.1. Sia K un campo e k un sottoanello di K. Denotiamo con $S = \mathrm{Zar}(K,k)$ l'insieme di tutte le classi d'equivalenza di valutazioni non banali di K che sono non negative su k (cioè tali che il loro anello di valutazione associato A_v contiene k). Seguendo la terminologia di Zariski [ZS-75b, pag. 110], chiamiamo S l'insieme sostegno della *superficie di Riemann astratta associata al campo K, considerato come k-algebra*; per brevità diremo che S è *la Superficie di Riemann di K su k*, anche se questa terminologia si riferisce più propriamente all'insieme S dotato anche di una topologia, che verrà introdotta nel Capitolo successivo.

Osservazioni 11.2. (a) Se k è un campo, allora $\mathrm{Zar}(K,k)$ è la totalità delle valutazioni non banali di K che sono banali su k.

(b) Per alcune applicazioni può risultare utile includere in $\mathrm{Zar}(K,k)$ anche la classe d'equivalenza della valutazione banale su K (cioè la valutazione che ha come anello associato K). L'insieme così allargato verrà denotato con $\mathrm{Zar}^*(K,k)$ o, semplicemente, con S^*

(c) Si vede facilmente che:

$$\mathrm{Zar}(K,k) = \emptyset \iff k \text{ è un campo e } K \text{ è un'estensione algebrica di } k.$$

(d) Nel seguito chiameremo *punti di $S = \mathrm{Zar}(K,k)$* gli elementi della superficie di Riemann. Inoltre, per comodità, identificheremo spesso i punti di $\mathrm{Zar}(K,k)$ con i loro anelli di valutazione associati.

Pertanto, nel seguito denoteremo con le lettere maiuscole:

$$P, Q, \ldots \quad \text{i punti di } \mathrm{Zar}(K,k)$$

e con:

$$(\mathcal{O}_P,\, \mathfrak{m}_P,\, k(P)), \quad (\mathcal{O}_Q,\, \mathfrak{m}_Q,\, k(Q)), \ldots$$

gli anelli di valutazione a loro canonicamente associati.

(e) Sia $K \supseteq K' \supseteq k$ una catena di inclusioni di campi. Diremo che un *punto* $P \in \mathrm{Zar}(K, k)$ *è al di sopra di un punto* $P' \in \mathrm{Zar}(K', k)$ se

$$(\mathcal{O}_{P'},\, \mathfrak{m}_{P'}) = (\mathcal{O}_P \cap K',\, \mathfrak{m}_P \cap K').$$

In tal caso, chiameremo *indice di ramificazione* (in simboli $e(P, P')$) l'indice di ramificazione di una valutazione associata a $\mathcal{O}_P$ su una valutazione associata a $\mathcal{O}_{P'}$. A volte, scriveremo:

$$P' = P\,|_{K'}\ .$$

Definizione 11.3. Sia K un campo, estensione di un altro campo k. Diremo che K è *un campo di funzioni algebriche in* $r \geq 1$ *variabili* (o *un campo di funzioni algebriche di dimensione* r) se K è finitamente generato su k e se il grado di trascendenza di K su k è esattamente uguale a r.

Particolarmente interessante è il caso $r = 1$, pertanto un campo K è *un campo di funzioni algebriche in una variabile su* k (ovvero *un campo di dimensione uno su* k) se esiste un elemento $x \in K$ trascendente su k in modo tale che K sia un'estensione finita di $k(x)$.

Inoltre, *supporremo che il campo* k *sia algebricamente chiuso.*
È bene però precisare che gran parte della teoria sulle superficie di Riemann si estende al caso in cui k è arbitrario, però in tal caso le complicazioni, non solo formali, richiedono una maggiore raffinatezza algebrica che trascende lo spirito di questo corso.

Osservazioni 11.4. (a) Se k è algebricamente chiuso e se K è un campo di funzioni di dimensione 1 su k, allora si può dimostrare che K è separabilmente generato su k (cioè esiste una base di trascendenza di K su k, in questo caso un elemento $x \in K$ trascendente su k, tale che K è un'estensione algebrica separabile di $k(x)$).
Si noti che vale un risultato analogo per campi di funzioni algebriche di dimensione r sopra un campo perfetto. Tale risultato è di F. K Schmidt. (cfr. [ZS-75, Thm. 31, pag. 105]).

(b) Per quanto affermato nel punto (a), ad un campo K di funzioni algebriche di dimensione 1 sopra un campo algebricamente chiuso k possiamo applicare il teorema dell'elemento primitivo. Pertanto, ogni campo K di funzioni algebriche di dimensione 1 sopra un campo algebricamente chiuso è necessariamente del tipo:

$$K = k(x, z)$$

dove x è trascendente su K e z è algebrico su $k(x)$.
Si noti, come nel punto (a), che un risultato analogo vale per campi di funzioni algebriche di dimensione r sopra un campo perfetto.

Nel seguito ci occuperemo della superficie di Riemann astratta associata ad un campo K di funzioni algebriche di dimensione 1 sopra un campo algebricamente chiuso k.
In tal caso, K è un'estensione finita di $k(x)$ dove x è un elemento (trascendente) di $K \setminus k$.

Allora, per determinare i punti di $\mathrm{Zar}(K, k)$, basta determinare

(*) i punti di $\mathrm{Zar}(k(x), k)$;

(**) per ogni punto $P \in \mathrm{Zar}(k(x), k)$, i punti di $\mathrm{Zar}(K, k)$ che sono al di sopra di P.

Proposizione 11.5. *Sia $K = k(X)$ il campo delle funzioni razionali in una indeterminata sopra un campo algebricamente chiuso k. Allora:*

$$\mathrm{Zar}(k(X), k) = \{ P_a := (\mathcal{O}_a,\, \mathfrak{m}_a) \mid a \in k_\infty \}$$

dove:

$$(\mathcal{O}_a,\, \mathfrak{m}_a) = \left(k\,[X]_{(X-a)}\,,\, (X-a)k\,[X]_{(X-a)} \right) \ \textit{per}\ a \in k, \ \textit{e}$$
$$(\mathcal{O}_\infty,\, \mathfrak{m}_\infty) = \left(k \left[\frac{1}{X} \right]_{\left(\frac{1}{X}\right)}\,,\, \left(\frac{1}{X} \right) k \left[\frac{1}{X} \right]_{\left(\frac{1}{X}\right)} \right)$$

(cfr. Esempi 4.7 1 e 7.10 1 e 2).

Dimostrazione. Già sappiamo che ogni $P_a \in \mathrm{Zar}(k(X), k)$ in quanto $(\mathcal{O}_a,\, \mathfrak{m}_a)$ è un anello di valutazione discreta (per giunta, di valutazione discreta soddisfacente alla proprietà **(G)**).

Viceversa sia $(A,\, \mathfrak{m})$ un qualunque anello di valutazione non banale di K, banale su k.

I Caso: $X \in A$
Consideriamo l'ideale primo nonzero

$$\mathfrak{p} := \mathfrak{m} \cap k\,[X] \subseteq k\,[X]\,.$$

Tale ideale deve essere principale ($k\,[X]$ è un PID) ed, in questo caso (k algebricamente chiuso), deve essere generato da un polinomio lineare per il Teorema degli zeri di Hilbert. Dunque:

$$\mathfrak{p} = (X - a) \qquad \text{per qualche } a \in k$$

È subito visto che $k\,[X]_{(X-a)} \subseteq A$. Se poi $z \in K \setminus \mathcal{O}_a$, allora:

$$z = \frac{f}{g} \quad \text{con} \quad f, g \in k\,[X]\,,\ g \neq 0,\ g(a) = 0,\ f(a) \neq 0$$

Se (per assurdo) $z \in A$, allora

$$\frac{1}{g} = \frac{z}{f} \in A \quad (\text{perché } z \in A,\ \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_a \subseteq A)$$

Ciò è impossibile, perché $g \in (X-a)k[X] \subseteq \mathfrak{m}$ (e quindi $\frac{1}{g} \notin A$).

II Caso: $X \notin A$ (quindi $\frac{1}{X} \in \mathfrak{m}$).
Denotiamo con X' l'elemento $\frac{1}{X}$. Allora, ovviamente $k(X) = k(X')$ ed A è un anello di valutazione di $k(X')$ tale che $X' \in \mathfrak{m}$. Ripetendo il discorso fatto nel primo caso, abbiamo che

$$\mathfrak{m} \cap k[X'] = (X')$$

(perché (X') è un polinomio irriducibile di $k[X']$ e quindi (X') è un ideale massimale di $k[X']$) e quindi

$$(A, \mathfrak{m}) = \left(k[X']_{(X')}, X'k[X']_{(X')}\right). \quad \square$$

Osservazioni 11.6. (a) Si noti che, ragionando in maniera pressoché analoga alla precedente, nel caso in cui k non fosse algebricamente chiuso potremmo dimostrare che:

$$\mathrm{Zar}(k(X), k) = \left\{ k[X]_{(h)} \,\middle|\, h \neq 0 \text{ monico e irriducibile} \right\} \cup \left\{ k\left[\frac{1}{X}\right]_{\left(\frac{1}{X}\right)} \right\}$$

(b) È opportuno osservare che, nel caso in cui k è algebricamente chiuso, ogni punto di $\mathrm{Zar}(K, k)$ soddisfa alla condizione **(G)**. Ciò non è più vero se si lascia cadere l'ipotesi di chiusura algebrica su k.

(c) Nel seguito parleremo di ordine di una funzione razionale $z \in k(X)$ in un punto $P \in \mathrm{Zar}(k(X), k)$, intendendo per questo il valore di z tramite la valutazione discreta normalizzata associata a P.
In particolare, se k è algebricamente chiuso, allora presi comunque $a, b \in k$

$$\mathrm{ord}_{P_a}(X-b) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \neq b \\ 1 & \text{se} \quad a = b \end{cases}$$

ed, ovviamente

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{P_\infty}(X-b) &= \mathrm{ord}_{P_\infty}(X) + \mathrm{ord}_{P_\infty}\left(1 - \frac{b}{X}\right) \\ &= -1, \qquad \text{qualunque sia } b. \end{aligned}$$

In generale, presa comuque una funzione razionale non zero $z \in k(X) \setminus \{0\}$, allora:

$$z = \frac{f}{g} = \frac{(X-a)^\alpha f'}{(X-a)^\beta g'},$$

con $\alpha, \beta \geq 0$; $f', g', f, g \in k[X]$, $g \neq 0$, $g' \neq 0$ e $(X-a) \nmid f'$, $(X-a) \nmid g'$.
Pertanto:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{P_a}(z) = \alpha - \beta, \quad \forall a \in k \\ &\mathrm{ord}_{P_\infty}(z) = \deg(g) - \deg(f) \end{aligned}$$

(cfr. Esempi 3.10).

Del problema (**) ci siamo già occupati nel Capitolo 8. Nel caso specifico in oggetto con le notazioni introdotte in questo capitolo abbiamo:

Proposizione 11.7. *Sia K un campo di funzioni di dimensione 1 sopra un campo algebricamente chiuso k. Sia $x \in K \setminus k$ in modo tale che K sia un'estensione finita di $k(x)$. Allora:*

(a) *Preso comunque un punto $P \in \mathrm{Zar}(k(x), k)$ esistono r punti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r \in \mathrm{Zar}(K, k)$ al di sopra di P con*

$$1 \leq r \leq [K : k(x)]\,.$$

(b) *Le valutazioni associate ai punti $Q \in \mathrm{Zar}(K, k)$ sono valutazioni discrete che soddisfano alla condizione **(G)** (quindi, per ogni Q, il grado residuo $f(Q, Q\,|_{k(x)}) = 1$).*

(c) *Per ogni $P \in \mathrm{Zar}(k(x), k)$ se $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathrm{Zar}(K, k)$ sono i punti al di sopra di P, allora gli indici di ramificazione soddisfano alla seguente relazione:*

$$\sum_{i=1}^{r} e(Q_i, P) \leq [K : k(x)]\,.$$

Dimostrazione. (a) e (c) sono una riformulazione del Corollario 8.8. Mentre (b) discende dall'Osservazione 9.2 (b). □ □

Osservazione 11.8. È bene sottolineare che nella relazione della Proposizione 11.7 (c) *vale il segno di uguaglianza*. Ma ciò è conseguenza di un risultato enunciato, ma non dimostrato, nell'Osservazione 8.9 (b). Ciò significa che, pur di contare i punti di $\mathrm{Zar}(K, k)$, che sono al di sopra di un punto variabile di $\mathrm{Zar}(k(x), k)$, con la "molteplicità" espressa dall'indice di ramificazione, l'insieme di tali punti è formato sempre dallo stesso numero $n = [K : k(x)]$ di elementi.

È opportuno fissare delle notazioni e della terminologia nel caso generale di un campo di funzioni K di dimensione 1 su un campo k algebricamente chiuso. Nel caso particolare in cui $K = k(X)$ è il campo delle funzioni razionali, tali notazioni e tale terminologia coincidono con quella di uso comune.
Sia $P \in S(K, k)$ e sia $z \in K$.
Diremo che *la funzione z è definita nel punto P, se $z \in \mathcal{O}_P$.*

Se $z \in K$ è una funzione definita in $P \in S(K, k)$ allora chiameremo *valore della funzione z calcolata nel punto P* l'immagine canonica di z sul campo $k \cong \frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{m}_P}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_P & \longrightarrow & \frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{m}_P} \cong k \\ z & \longmapsto & z(P) := z + \mathfrak{m}_P \end{array}$$

Chiaramente,

$$z \text{ è definita in } P \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_P(z) \geq 0$$

Diremo che:
z è definita in P ed ha uno zero di ordine $r \geq 0$ in P se $\mathrm{ord}_P(z) = r$.
Diremo, invece, che:
z (non è definita in P ed) ha un polo di ordine $r > 0$ in P se $\mathrm{ord}_P(z) = -r < 0$, in tal caso si pone (per convenzione) che *il valore della funzione z calcolata in*

un polo P è $z(P) := \infty$.

Si noti che il valore di una funzione z in un punto $P \in \mathrm{Zar}(K, k)$, come è stato definito sopra, non è altro che il valore di z tramite un posto associato a P.