Capitolo 4

Anelli di valutazione

Proposizione 4.1. *Sia* $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ *una valutazione di un campo* K*. Allora:*

(a) *L'insieme:*
$$A_v := \{\, x \in K |\, v(x) \geq 0\}$$
è un sottoanello di K *avente* K *come campo dei quozienti, detto* anello associato alla valutazione v, *o, brevemente* anello di v.

(b) A_v *è un anello locale integro, avente come ideale massimale:*
$$\mathfrak{m}_v := \{\, x \in K |\, v(x) \gneq 0\}$$
dunque l'insieme degli elementi invertibili di A_v *è così fatto:*
$$\mathcal{U}(A_v) = A_v \setminus \mathfrak{m}_v := \{\, x \in K |\, v(x) = 0\}\,.$$

(c) *Preso comunque* $x \in K$*, allora:*
$$x \notin A_v \Longrightarrow x^{-1} \in \mathfrak{m}_v \subseteq A_v.$$

Dimostrazione. È facile verificare che A_v è un sottoanello (integro) di K. Inoltre, l'affermazione (b) è una conseguenza immediata del fatto che:
$$v\left(x^{-1}\right) = -v(x), \qquad \text{per } \; x \in K^*.$$
Dunque
$$\mathcal{U}(A_v) = \{\, x \in A_v |\, v(x) = 0\} = \{\, x \in K |\, v(x) = 0\}\,,$$
e quindi:
$$A_v \setminus \mathcal{U}(A_v) = \{\, x \in A_v |\, v(x) \gneq 0\}$$
è un ideale di A_v (cfr. Proposizione 1.1). Infatti:

(*) $x, y \in A_v \setminus \mathcal{U}(A_v) \Rightarrow v(x),\; v(y) > 0 \Rightarrow v(x \pm y) \geq \min(v(x), v(y)) > \; 0 \Rightarrow x \pm y \in A_v \setminus \mathcal{U}(A_v)$;

(**) $a \in A_v,\; x \in A_v \setminus \mathcal{U}(A_v) \Rightarrow v(a) \geq 0,\; v(x) > 0 \Rightarrow v(ax) = v(a) + v(x) > \; 0 \Rightarrow ax \in A_v \setminus \mathcal{U}(A_v)$.

Per dimostrare (c), osserviamo che: $x \in K \setminus A_v \Rightarrow v(x) < 0 \Rightarrow v\left(x^{-1}\right) > 0 \Rightarrow x^{-1} \in \mathfrak{m}_v$.
Resta da dimostrare che K è il campo dei quozienti di A_v. Ma ciò segue facilmente da (c). Infatti:

$$x \in K \setminus A_v \Rightarrow x^{-1} \in \mathfrak{m}_v,$$

quindi $\frac{1}{x^{-1}} = x$ deve appartenere al campo dei quozienti di A_v. L'inclusione (opposta) del campo dei quozienti di A_v in K è banale, essendo $A_v \subseteq K$. $\square$

Definizione 4.2. Un sottoanello A di un campo K viene chiamato *anello di valutazione di* K se accade che:

$$x \in K \setminus A \Rightarrow x^{-1} \in A.$$

Proposizione 4.3. *Sia A un anello di valutazione di un campo K. Allora:*

(a) *A è integro con campo dei quozienti K.*

(b) $x \in K \setminus A \Rightarrow x^{-1} \in A \setminus \mathcal{U}(A)$.

(c) *A è locale con ideale massimale:*

$$\mathfrak{m} := A \setminus \mathcal{U}(A) = \left\{x \in A^* \,|\, x^{-1} \in K \setminus A\right\} \cup \{0\}.$$

Dimostrazione.

(a) Discende dal fatto che K è un campo e ogni elemento $x \in K \setminus A$ è tale che $x^{-1} \in A$ e, quindi, $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$ deve stare nel campo dei quozienti di A.

(b),(c) È immediato che:

$$x \in K \setminus A \Rightarrow x^{-1} \in A \quad \text{e} \quad x^{-1} \notin \mathcal{U}(A)$$

Facciamo vedere che $A \setminus \mathcal{U}(A)$ è un ideale. Siano $x, y \in A \setminus \mathcal{U}(A)$. Non è restrittivo (scambiando eventualmente x con y) supporre che $xy^{-1} \in A$.
Se (per assurdo) $x \pm y \in \mathcal{U}(A)$, allora:

$$(x \pm y)y^{-1} = xy^{-1} \pm 1 \in A$$

dunque $y^{-1} \in A$ e ciò è assurdo.
Siano $a \in A$ e $x \in A \setminus \mathcal{U}(A)$. È evidente che $ax \in A \setminus \mathcal{U}(A)$ (perché altrimenti $ax \in \mathcal{U}(A) \Rightarrow x \in \mathcal{U}(A)$). La conclusione discende dalla Proposizione 1.1. $\square$

Osservazione 4.4. Sia A un anello di valutazione di un campo K. Nel seguito denoteremo spesso $(A, \mathfrak{m}, k(A))$ (con le convenzioni già introdotte nel caso di anelli locali) per denotare che $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di A detto anche *centro* di A, e che $k(A) := \frac{A}{\mathfrak{m}}$ è il *campo residuo* dell'anello di valutazione A.
Sia k un sottoanello di un campo K e sia A una sotto-k-algebra di K. Se $(A, \mathfrak{m}, k(A))$ è un anello di valutazione di K, allora l'ideale primo: $\mathfrak{m} \cap k$ dell'anello k si dice *centro di A sopra k*.
Un anello di valutazione A di K, del tipo sopra considerato, si dice *banale* sopra k, od anche che A è un anello di valutazione di K su k. È facile verificare che, in tale situazione,

$$k \text{ è un campo } \iff k \cap \mathfrak{m} = (0).$$

Facciamo vedere, ora, che ogni anello di valutazione A di un campo K è l'anello associato ad una valutazione v_A di K.

Teorema 4.5. *Sia dato un anello di valutazione A di un campo K. Allora, esiste sempre una valutazione v definita su K tale che l'anello associato alla valutazione v, A_v (cfr. Proposizione 4.1), coincide con A.*
Se, poi, v' è un'altra valutazione di K tale che $A_{v'} = A$, allora $v' \sim v$ (cfr. Definizione 3.11).

Dimostrazione. Consideriamo il gruppo moltiplicativo quoziente:

$$\Delta := \frac{K^*}{\mathcal{U}(A)}$$

(dove al solito $\mathcal{U}(A)$ è il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di A che è un sottogruppo del gruppo K^* degli elementi nonzero del campo K). Il gruppo Δ è dotato di una struttura naturale di gruppo moltiplicativo ordinato. Infatti, per quanto dimostrato nella Proposizione 4.3:

$$K^* = \mathfrak{m}^* \sqcup \mathcal{U}(A) \sqcup (\mathfrak{m}^*)^{-1}$$

dove $\mathfrak{m}^* := \mathfrak{m} \setminus \{0\}$, $(\mathfrak{m}^*)^{-1} = \left\{ x^{-1} \middle| \, x \in \mathfrak{m}^* \right\} = K \setminus A$.
Dunque:

$$\Delta = \frac{\mathfrak{m}^*}{\mathcal{U}(A)} \sqcup \{1\} \sqcup \left(\frac{\mathfrak{m}^*}{\mathcal{U}(A)} \right)^{-1}$$

dove l'insieme:

$$\frac{\mathfrak{m}^*}{\mathcal{U}(A)} := \{ x\mathcal{U}(A) | \, x \in \mathfrak{m}^* \}$$

si prende come insieme degli elementi positivi di Δ. Quindi, presi comunque $x, y \in K^*$:

$$x\mathcal{U}(A) < y\mathcal{U}(A) :\Longleftrightarrow xy^{-1}\mathcal{U}(A) \in \frac{\mathfrak{m}^*}{\mathcal{U}(A)} \Longleftrightarrow xy^{-1} \in \mathfrak{m}^*$$

(in particolare $x\mathcal{U}(A) < \mathcal{U}(A) \Longleftrightarrow x \in \mathfrak{m}^*$).
Si noti che: $x\mathcal{U}(A) \leq y\mathcal{U}(A) \Longleftrightarrow xy^{-1} \in A^*$.
Definiamo, allora, una valutazione ponendo:

$$\begin{array}{rcl} v : K & \longrightarrow & \Delta_0 \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ x\mathcal{U}(A), & \text{se } x \in K^*. \end{cases} \end{array}$$

È subito visto che l'anello associato a v (con gruppo di valori con notazione moltiplicativa) è dato da:

$$A_v = \{ x \in K | \, v(x) \leq 1 \} = A.$$

Se, poi, $v' : K \longrightarrow \Delta'_0$ è un'altra valutazione tale che $A_{v'} = A$, allora:

$$\begin{aligned} \Delta' = v'(K^*) \cong \frac{K^*}{\ker(v')} &= \frac{K^*}{\{ x \in K^* | \, v'(x) = 1_{\Delta'} \}} = \\ &= \frac{K^*}{\mathcal{U}(A_{v'})} = \frac{K^*}{\mathcal{U}(A_v)} = \frac{K^*}{\mathcal{U}(A)} = \Delta. \end{aligned}$$

Inoltre, in tale isomorfismo, gli elementi positivi si corrispondono:

$$v'(x) < 1_{\Delta'} \Longleftrightarrow x \in A_{v'} \setminus \mathcal{U}(A_{v'}) \Longleftrightarrow x \in A_v \setminus \mathcal{U}(A_v) \Longleftrightarrow v(x) < 1_{\Delta}. \quad \square$$

Osservazione 4.6. Si noti che dato comunque un campo K e un sottoanello R di K avente K come campo delle frazioni, allora la relazione di divisibilità in R:

$$x \mid y \Longleftrightarrow y \in xR \Longleftrightarrow yR \subseteq xR \Longleftrightarrow yx^{-1} \in R$$

è una relazione di preordine in R^*. Tale relazione fa (anche) di K^* un insieme (anzi un gruppo) preordinato ($x, y \in K^*$ e $x \mid y :\Longleftrightarrow \exists r \in R$ tale che $xr = y$). Il gruppo parzialmente ordinato associato a $(K^*, |)$ è il seguente gruppo quoziente, detto *gruppo di divisibilità* di R:

$$\Delta_R := \frac{K^*}{\mathcal{U}(R)}$$

nel quale: $x\mathcal{U}(R) \geq y\mathcal{U}(R) \Longleftrightarrow xy^{-1} \in R^* \Longleftrightarrow x\,R \subseteq y\,R$. Si può dimostrare che Δ_R è un gruppo (totalmente) ordinato se e soltanto se R è un anello di valutazione di K. In tal caso, cioè se R è un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$, allora $R = V$ e l'insieme degli elementi positivi rispetto all'ordine opposto a quello associato a $|$ (cioè $x\mathcal{U}(R) \leq y\mathcal{U}(R) :\Longleftrightarrow xR \subseteq yR$), coincide con $\frac{\mathfrak{m}^*}{\mathcal{U}(R)}$.

Il problema di vedere quali gruppi abeliani parzialmente ordinati sono gruppi di divisibilità di un qualche anello integro è stato studiato da molti autori con l'intento di formulare, in termini di gruppi parzialmente ordinati, problemi della teoria degli anelli integri.
È noto ad esempio che una condizione necessaria affinché un gruppo parzialmente ordinato sia il gruppo di divisibilità di un qualche dominio è che sia un gruppo filtrato[1] ; mentre una condizione sufficiente è che il gruppo sia un gruppo reticolato[2].
Importanti contributi, esempi e controesempi a tale tematica si trovano in: [Ka-84], [G-72], [Le-73], [GP-74], [O-69], [J-60], [Lo-39], [Kr-43].

Esempi 4.7. 1. L'anello della valutazione:

$$\mathrm{ord}_a;\ k(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty \quad \text{(cfr. Esempio 3.10 1)).}$$

non è altro che il sottoanello $\mathcal{O}_a$ di $k(X)$ formato da tutte le funzioni razionali definite in a:

$$\mathcal{O}_a := \left\{ z = \frac{f}{g} \in k(X) \middle| g(a) \neq 0 \right\} = \{ z \in k(X) |\, \mathrm{ord}_a(z) \geq 0 \} = \\ = k\,[X]_{(X-a)}\,.$$

[1]sia Γ un gruppo preordinato, Γ si dice *filtrato a sinistra* (risp. *a destra*) se $\forall a_1,\ a_2 \in \Gamma \Rightarrow \exists a \in \Gamma$ tale che $a \leq a_1$ e $a \leq a_2$ (risp. $a_1 \leq a$ e $a_2 \leq a$; Γ è *filtrato* se è filtrato sia a destra che a sinistra).

[2]cioè, $\forall a_1,\ a_2 \in \Gamma \Rightarrow \exists \sup(a_1, a_2)$ (ovvero $\inf(a_1, a_2)$)$\in \Gamma$.

L'ideale massimale di $\mathcal{O}_a$ è:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_a &:= \left\{ z = \frac{f}{g} \in k(X) \,\middle|\, g(a) \neq 0,\ f(a) = 0 \right\} = \\ &= \{\, z \in k(X) |\, \mathrm{ord}_a(z) \gneq 0\} = (X - a)k\,[X]_{(X-a)}\,.\end{aligned}$$

È opportuno notare che per $a = 0$ si ha:

$$\mathcal{O}_0 := \left\{ z = \frac{f}{g} \in k(X) \,\middle|\, \mathrm{ord}(f) \geq \mathrm{ord}(g) \right\} = k\,[X]_{(X)}$$

(dove l'ordine di un polinomio è il suo ordine considerato come serie formale).

2. L'anello della valutazione:

$$\mathrm{ord}_\infty :\ k(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty \quad \text{(cfr. Esempio 3.10, 2))}$$

è il seguente sottoanello del campo delle funzioni razionali:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\infty &:= \left\{ z = \frac{f}{g} \in k(X) \,\middle|\, \deg(g) \geq \deg(f) \right\} = \\ &= \{\, z \in k(X) \,|\, \mathrm{ord}_\infty(z) \geq 0\} = k \left[\frac{1}{X}\right]_{\left(\frac{1}{X}\right)}\end{aligned}$$

(Cfr. anche la successiva Osservazione 4.8).
L'ideale massimale di $\mathcal{O}_\infty$ è:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_\infty &:= \left\{ z = \frac{f}{g} \in k(X) \,\middle|\, \deg(g) \gneq \deg(f) \right\} = \\ &= \{\, z \in k(X) |\, \mathrm{ord}_\infty(z) \gneq 0\} = \left(\frac{1}{X}\right) k \left[\frac{1}{X}\right]_{\left(\frac{1}{X}\right)}\,.\end{aligned}$$

3. L'anello della valutazione dell'Esempio 3.10, 3. è:

$$(k\,[\![X]\!]\,,\ Xk\,[\![X]\!]\,,\ k)\,.$$

4. L'anello della valutazione dell'Esempio 3.10, 4. è:

$$\left(\mathbb{Z}_p,\ p\mathbb{Z}_p,\ \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)$$

5. L'anello della valutazione dell'Esempio 3.10, 5. è:

$$\left(A_{(p)},\ pA_{(p)},\ \frac{A_{(p)}}{pA_{(p)}}\right)\,.$$

6. Gli anelli delle valutazioni dell'Esempio 3.10, 6. sono rispettivamente:
   - $\Big(k(Y)\,[X]_{(X)}\,,\, Xk(Y)\,[X]_{(X)}\,,\, k(Y)\Big)$ (quello di ord^X);
   - $\Big(k(X)\,[Y]_{(Y)}\,,\, Yk(X)\,[Y]_{(Y)}\,,\, k(X)\Big)$ (quello di ord^Y);
   - $\Big(k\,[Y]_{(Y)} + Xk(Y)\,[X]_{(X)}\,,\, Yk\,[Y]_{(Y)} + Xk(Y)\,[X]_{(X)}\,,\, k\Big)$ (quello di ord).
7. Se $(V, \mathfrak{m})$ è l'anello della valutazione dell'Esempio 3.10, 7, allora:

   $$(V' := V \cap K',\ \mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap K')$$

   è l'anello della valutazione $v' = v\,|_{K'}$
8. L'anello della valutazione dell'Esempio 3.10, 11:

   $$v:\ k\,(\,X_\alpha|\,\alpha \in P) \longrightarrow \Gamma_\infty$$

   in generale, non è facilmente esprimibile in temini di anelli di tipo molto elementare. Comunque si può notare che se $\mathfrak{p}$ è l'ideale massimale dell'anello $A = k\,[\,X_\alpha|\,\alpha \in P]$ generato da $(\,X_\alpha|\,\alpha \in P)$ e se denotiamo con $(V, \mathfrak{m})$ l'anello della valutazione v, allora risulta:

   $$\mathcal{U}(V) = V \setminus \mathfrak{m} = \left\{ \frac{(a+f)}{(b+g)} \,\middle|\, a, b \in k^*;\ f, g \in \mathfrak{p} \right\}$$

   ed, inoltre, gli elementi dell'ideale massimale $\mathfrak{m}$ possono essere descritti in funzione degli elementi di $\mathfrak{p}$ nel modo seguente: $\mathfrak{m} = \left\{ \frac{f}{(b+g)} \,\middle|\, b \in k^*;\ f, g \in \mathfrak{p} \right\}$.
   Infine risulta:

   $$V = k + \mathfrak{m} = \left\{ \frac{(a+f)}{(b+g)} \,\middle|\, a \in k,\ b \in k^*;\ f, g \in \mathfrak{p} \right\}.$$

   Pertanto, il campo residuo di V è canonicamente isomorfo al campo k dei coefficienti.
   Questa costruzione permette di esplicitare anelli di valutazione di cui vengono assegnati arbitrariamente il gruppo (totalmente ordinato) dei valori ed il campo residuo.
   Per maggiore concretezza, vediamo di esplicitare tale esempio in alcuni casi particolari. Se $\Gamma = \mathbb{Z}$, allora:

   $$\begin{array}{rcl} A = k\,[X_n,\, n \geq 1] & \cong & k\,[T] \\ X_n & \mapsto & T^n \end{array}$$

   $(V, \mathfrak{m}) \cong k\,[T]_{(T)}$ (dove T è una "vera" indeterminata su k).
   Se $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ordinato lessicograficamente) allora:

   $$\begin{array}{rcl} A = k\,\big[\,X_{(n,\,m)}\big|\,(n,\,m) \in P\big] & \cong & k\,[U,\,V] \\ X_{(n,\,m)} & \mapsto & U^n V^m, \end{array}$$

   (dove U e V sono due "vere" indeterminate su k)

   $$V \cong k\,[V]_{(V)} + Uk(V)\,[U]_{(U)}\,,$$

cioè V è isomorfo all'anello di valutazione già considerato nell'Esempio 5. Si noti che se su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si prende l'ordine opposto a quello lessicografico, allora il risultato che si avrà sull'anello di valutazione sarà quello di scambiare tra loro le indeterminate.

Osservazioni 4.8. (a) Con riferimento agli Esempi 4.7, 1 e 2, se poniamo $X' = \frac{1}{X} \in k(X)$, allora ovviamente $k(X) = k(X')$.
Notiamo che, se $f \in k[X]$, $f \neq 0$, allora supponendo $n := \deg(f)$ abbiamo:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = X^n \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{X^i}{X^n} \right).$$

Dunque

$$\frac{f}{X^n} = \sum_{i=0}^{n} a_i (X')^{n-i} =: f' \in k[X'].$$

Sia $z = \frac{f}{g} \in k(X)$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in k[X]$ due polinomi non nulli e sia $t := \max(\deg(f), \deg(g))$. Allora:

$$z = \frac{\frac{f}{X^t}}{\frac{g}{X^t}} = \frac{(X')^{-t} f'}{(X')^{-t} g'} = \frac{f'}{g'}$$

dove $f' = \sum_{i=0}^{n} a_i (X')^{t-i}$, $g' = \sum_{j=0}^{m} b_j (X')^{t-j} \in k[X']$. Poniamo $\varphi(z) := \frac{f'}{g'} \in k(X')$.
Quindi φ determina l'isomorfismo identità tra i campi dei quozienti di $k[X]$ e $k[X']$.
Notiamo, ora, che:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_0 \left(\frac{f'}{g'} \right) &= \mathrm{ord}_0(f') - \mathrm{ord}_0(g') = \\
&= (t - \deg(f)) - (t - \deg(g)) = \\
&= \deg(g) - \deg(f) = \\
&=: \mathrm{ord}_\infty \left(\frac{f}{g} \right).
\end{aligned}$$

In conclusione, possiamo dire che esiste una "dualità" tra le valutazioni ord_0 e ord_∞ su $k(X)$ nel senso che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
k(X) \arrow[dr, "\mathrm{ord}_\infty"'] & = & k(X') \arrow[dl, "\mathrm{ord}_0"] \\
& \mathbb{Z}_\infty &
\end{tikzcd}$$

(b) L'anello della valutazione dell'Esempio 4.7 6, è un esempio di una classe vasta ed importante di anelli di valutazione. Fissato un anello di valutazione $(V, \mathfrak{m}, k)$ di un campo K sia A un sottoanello del campo residuo di k, allora si può considerare il seguente diagramma di omomorfismi canonici:

$$\begin{tikzcd} R = \varphi^{-1}(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ V \arrow[r, two heads, "\varphi"] & \frac{V}{\mathfrak{m}} = k \end{tikzcd}$$

(R è chiamato anche il "pullback" di A in V, o prodotto fibrato di A e V rispetto a φ). Ebbene si dimostra che R è un anello di valutazione (di K) se e soltanto se A è un anello di valutazione di k. In tal caso R si dice *anello di valutazione composto di A con V* sopra k. L'Esempio 4.7 6 è un esempio di un anello di valutazione nel campo $K = k(X, Y)$ costruito come prodotto fibrato di $A = k[Y]_{(Y)}$ con $(V, \mathfrak{m}, k) = \Big(k(Y)\,[X]_{(X)}\,,\, Xk(Y)\,[X]_{(X)}\,,\, k(Y)\Big)$.

(c) La costruzione generale di anelli (non necessariamente di valutazione) come prodotto fibrato si è mostrata molto proficua soprattutto per la costruzione di esempi e controesempi in teoria degli anelli commutativi.
Segnaliamo che anelli del tipo "$D + M$" di Gilmer (cfr. [G-72]) sono ottenuti come pullback del seguente tipo:

$$\begin{tikzcd} D + M \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ V = k + M \arrow[r, two heads] & k = \left(\frac{V}{M}\right) \end{tikzcd}$$

dove (V, M, k) è un anello di valutazione che ha il suo campo residuo k come retratto di V (cioè $V = k + M$ e la composizione $k \hookrightarrow V = k + M \to \frac{V}{M} = k$ è l'identità), e D è un sottoanello del campo k (cfr. per maggiori dettagli [G-72]).

I *domini locali di dimensione globale* 2 classificati da W. Vasconcelos sono anelli di tipo "pullback" (cfr. [V-76]).

I *domini di pseudovalutazione* sono tutti e soli i domini ottenuti per pullback di un anello di valutazione con un sottocampo del campo residuo. (Ad esempio, sia $A = \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$, dove d è un intero privo di fattori quadratici; è noto che se (e soltanto se) $d \equiv 1 \pmod 4$ la chiusura integrale B di A dentro $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ è distinta da A. Si verifica poi che se $d \equiv 5 \pmod 8$, allora per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di B, $A_{\mathfrak{p} \cap A}$ è un anello di pseudovalutazione avente $B_{\mathfrak{p}}$ come anello di valutazione associato nel pullback.) Per maggiori dettagli cfr. [HH-78a]; [HH-78b]; [DF-83].

Proposizione 4.9. *Sia A un anello di valutazione con campo dei quozienti K. Allora:*

(a) *Ogni anello B tale che $A \subseteq B \subseteq K$ (un anello di questo tipo viene chiamato* sopraanello del dominio *A) è un anello di valutazione; di più, esiste un ideale primo $\mathfrak{p} \subseteq A$ in modo tale che:*

$$B = A_{\mathfrak{p}}$$

(b) *Ogni sopraanello di un anello di valutazione è normale (cioè integralmente chiuso nel suo campo dei quozienti).*

Dimostrazione. La prima parte di (a) è una conseguenza diretta della definizione di anello di valutazione. Sia $\mathfrak{n}$ l'ideale massimale di B e sia $\mathfrak{p} := \mathfrak{n} \cap A$, allora ovviamente $A_{\mathfrak{p}} \prec B$ (cfr. Es. 1.5 (a), pag. 12). Inoltre, se $y \in B \setminus A$, allora $y^{-1} \in A \setminus \mathcal{U}(A) = \mathfrak{m}$. Dunque $y^{-1} \notin \mathfrak{n}$ (perché $y \in B$), quindi:

$$y^{-1} \notin \mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{p}$$

cioè y^{-1} è invertibile in $A_{\mathfrak{p}}$. In conclusione $y \in A_{\mathfrak{p}}$, ovvero $A_{\mathfrak{p}} = B$.
Per dimostrare (b), in virtù del punto (a), basta mostrare che ogni anello di valutazione A è normale. Sia $x \in K$ intero su A, allora:

$$x^n = -\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}\right), \quad a_i \in A, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Se supponiamo che $x \notin A$, allora $x^{-1} \in A$, quindi:

$$x = x^n \cdot x^{-n+1} = -(a_0 x^{1-n} + a_1 x^{2-n} + \cdots + a_{n-2} x^{-1} + a_{n-1})$$

dunque arriviamo all'assurdo che $x \in A$. □

Corollario 4.10. *Sia A un anello di valutazione con campo dei quozienti K. L'applicazione:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \mid \textit{ideale primo di}\, A\} & \longrightarrow & \{B \mid B \textit{ sopraanello di}\, A\} \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & A_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca che inverte gli ordinamenti (determinati dalla relazione di inclusione).

□

Osservazione 4.11. Abbiamo già osservato che un dominio A con campo dei quozienti K è un anello di valutazione se e soltanto se il gruppo moltiplicativo:

$$\Delta_A = \frac{K^*}{\mathcal{U}(A)}$$

è un gruppo totalmente ordinato.
Se chiamiamo *sottogruppo isolato* (o *convesso*) di un gruppo ordinato Δ un sottogruppo Δ' di Δ tale che (con notazione moltiplicativa):

$$1 \geq y \geq x \quad \text{e} \quad x \in \Delta' \Rightarrow \ y \in \Delta'.$$

ad esempio $\{0\} \times \mathbb{Z}$ è un sottogruppo isolato del gruppo (additivo) ordinato lessicograficamente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, infatti:

$$(0,0) \leq (\alpha, \beta) \leq (0, \gamma) \quad (\text{con } (0,\gamma) \in \{0\} \times \mathbb{Z}) \Rightarrow \ \alpha = 0.$$

Si vede facilmente che se A è un sottoanello di un anello B allora $\mathcal{U}(A) \subseteq \mathcal{U}(B)$. Pertanto se B è un sopraanello di un dominio A con campo dei quozienti K allora esiste un omomorfismo suriettivo canonico

$$\varphi : \ \Delta_A = \frac{K^*}{\mathcal{U}(A)} \longrightarrow \frac{K^*}{\mathcal{U}(B)} = \Delta_B$$

con $\ker(\varphi) = \frac{\mathcal{U}(B)}{\mathcal{U}(A)} =: \Phi_B$. Non è difficile assicurarsi che Φ_B è un sottogruppo isolato di Δ_A ed inoltre l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \{ B \mid B \text{ sopraanello di } A \} & \longrightarrow & \{ \Delta' \mid \text{sottogruppo isolato di } A \} \\ B & \longmapsto & \Phi_B \end{array}$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca che conserva gli ordinamenti (determinati dalla relazione di inclusione).

Osservazione 4.12. È opportuno notare che se un anello di valutazione A è ottenuto tramite composizione di due anelli di valutazione:

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1}(W) = A \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & W \arrow[d, hook] \\ V \arrow[r, two heads, "\varphi"] & k(V) = \frac{V}{\mathfrak{m}} \end{tikzcd}$$

dove $(V, \mathfrak{m})$ è un anello di valutazione del campo dei quozienti di A e W è un anello di valutazione del campo residuo di V, allora si può dimostrare che i gruppi dei valori di tali anelli di valutazione formano una successione esatta (gli omomorfismi sono naturali), del tipo:

$$\{1\} \longrightarrow \Delta_W \hookrightarrow \Delta_A \twoheadrightarrow \Delta_V \longrightarrow \{1\},$$

cfr. [B-85b, Ch. 6, Par. 4, N.3, Remarque].

Teorema 4.13. *Sia dato un campo K e sia $\mathcal{L}$ una famiglia non vuota di anelli locali aventi K come campo dei quozienti. $\mathcal{L}$ è un insieme ordinato tramite la relazione di dominanza. Supponiamo che $\mathcal{L}$ verifichi la seguente proprietà:*

$$B \in \mathcal{L} \quad e \quad B \prec C \Rightarrow C \in \mathcal{L}.$$

Allora, un qualsiasi elemento massimale $(A, \mathfrak{m})$ di $\mathcal{L}$ è necessariamente un anello di valutazione di K.

Cominciamo col dimostrare il seguente utile lemma detto (x, x^{-1})-Lemma:

Lemma 4.14. *Sia A un sottoanello di un campo K e sia $\mathfrak{a}$ un ideale proprio di A. Sia $x \in K \setminus \{0\}$. Poniamo:*

$$\mathfrak{a}[x] := \mathfrak{a}A[x] \quad \mathfrak{a}\left[x^{-1}\right] := \mathfrak{a}A\left[x^{-1}\right].$$

Allora accade sempre una delle seguenti eventualità:

$$\mathfrak{a}[x] \neq A[x] \quad \textit{oppure} \quad \mathfrak{a}\left[x^{-1}\right] \neq A\left[x^{-1}\right].$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\mathfrak{a}[x] = A[x]$ e $\mathfrak{a}\left[x^{-1}\right] = A\left[x^{-1}\right]$. Allora

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 1 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{-j} \quad a_i, b_j \in \mathfrak{a}. \tag{4.1}$$

Siano n ed m i minimi interi per cui sussistano relazioni del tipo (4.1). A meno di scambiare x con x^{-1}, possiamo supporre per comodità che $n \geq m$. Moltiplicando il secondo e terzo membro della relazione (4.1) per x^n, abbiamo:

$$x^n = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{n-j} \quad \text{ovvero} \quad (1-b_0)x^n = \sum_{j=1}^{m} b_j x^{n-j}.$$

Moltiplicando il primo e secondo membro di (4.1) per $(1-b_0)$ abbiamo:

$$(1-b_0) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i + a_n(1-b_0)x^n, \quad \text{dove} \quad c_i := a_i(1-b_0). \tag{4.2}$$

Sostituendo a secondo membro della precedente uguaglianza il valore di $(1-b_0)x^n$ calcolato in 4.2, otteniamo:

$$1 = b_0 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i + a_n \left(\sum_{j=1}^{m} b_j x^{n-j} \right)$$

e ciò è assurdo per la scelta di minimalità fatta su n. $\square$

Dimostrazione del Teorema 4.13.
Facciamo vedere che preso comunque $x \in K \setminus \{0\}$ allora x oppure x^{-1} appartiene ad A.
A meno di scambiare x con x^{-1}, per il Lemma (4.14) possiamo supporre che:

$$\mathfrak{m}\,[x] \neq A\,[x]\,.$$

Se M è un ideale massimale di $A\,[x]$ che contiene l'deale proprio $\mathfrak{m}\,[x]$ e se:

$$(B,\, \mathfrak{n}) := \left(A\,[x]_M\,,\, MA\,[x]_M\right)$$

allora, ovviamente, $(A,\, \mathfrak{m}) \prec (B,\, \mathfrak{n})$. Per la massimalità di $(A,\, \mathfrak{m})$ in $\mathcal{L}$, allora A deve coincidere con B. Quindi, essendo

$$A \subseteq A\,[x] \subseteq A\,[x]_M = B,$$

deve essere $A = A\,[x]$, cioè $x \in A$. $\square$

Teorema 4.15. *Ogni sottoanello proprio locale* $(A,\, \mathfrak{m})$ *di un campo* K *è dominato da almeno un anello di valutazione di* K*.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{L}$ l'insieme (non vuoto), ordinato per dominanza, formato da tutti gli anelli locali, sottoanelli propri di K, che dominano A. Presa comunque una famiglia totalmente ordinata di elementi di $\mathcal{L}$,

$$\{\,(B_i,\, \mathfrak{n}_i)|\; i \in I\}$$

allora $\bigcup_{i \in I} B_i = B$ è un anello locale, sottoanello proprio di K, che domina A. Infatti, B è banalmente un sottoanello di K che contiene A (come sottoanello). Inoltre B è locale, in quanto:

$$\mathcal{U}(B) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}(B_i)$$

e, quindi, $B \setminus \mathcal{U}(B) = \mathfrak{n}$ è un ideale. Inoltre, per costruzione, $(B, \mathfrak{n})$ domina $(B_i, \mathfrak{n}_i)$ $\forall i \in I$ e, quindi, per transitività, domina $(A, \mathfrak{m})$. Possiamo applicare ad $\mathcal{L}$ il lemma di Zorn e, quindi, possiamo affermare che esiste sempre in $\mathcal{L}$ (almeno) un elemento massimale, il quale, per il Teorema 4.13, risulta essere un anello di valutazione di K. □

Corollario 4.16. *Sia v una valutazione di un campo K e sia E un'estensione di K. Allora, esiste sempre (almeno) una valutazione w di E tale che $w\,|_K$ è equivalente a v.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 4.15 all'anello $(A_v, \mathfrak{m}_v)$ sottoanello del campo E. La conclusione discende facilmente ricordando che due valutazioni sono equivalenti se, e soltanto se, hanno lo stesso anello associato. □

Corollario 4.17. *Sia A un anello integro e sia K il suo campo dei quozienti. Se denotiamo con A' la normalizzazione di A, allora:*

$$A' = B := \bigcap \{V \mid V \text{ è un sopraanello di valutazione di } A\}.$$

Dimostrazione. Intanto, $A' \subseteq B$ in quanto:

$$A \subseteq V,\ V \text{ normale } \Rightarrow A' \subseteq V.$$

Se, poi, $x \in K \setminus A'$, allora $x \notin A\left[x^{-1}\right]$ (perché altrimenti x sarebbe intero su A), quindi $x^{-1} \notin \mathcal{U}\left(A\left[x^{-1}\right]\right)$. Sia $\mathfrak{n}$ un ideale massimale di $C := A\left[x^{-1}\right]$ che contiene l'ideale proprio $\left(x^{-1}\right)$ di $A\left[x^{-1}\right]$. Allora, per il Teorema 4.15, deve esistere un anello di valutazione $(V, \mathfrak{m})$ che domina l'anello $(C_{\mathfrak{n}}, \mathfrak{n}C_{\mathfrak{n}})$. Pertanto:

$$x^{-1} \in \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{m} \Rightarrow x = \left(x^{-1}\right)^{-1} \notin V$$

donde la conclusione. □

Corollario 4.18 (W. Krull, 1932)**.** *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un sottoanello locale di un campo K. Le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:*

(i) *$(A, \mathfrak{m})$ è un anello di valutazione di K, $A \neq K$;*

(ii) *$(A, \mathfrak{m})$ è un elemento massimale nell'insieme formato da tutti gli anelli locali contenuti propriamente in K (ordinato per dominanza).*

Dimostrazione.
$(iI) \Rightarrow (i)$ è una conseguenza del Teorema 4.13.
$(i) \Rightarrow (Ii)$. Se, per assurdo, esistesse un anello locale proprio $(B, \mathfrak{n})$ in K con $(B, \mathfrak{n}) \succ (A, \mathfrak{m})$ e se $x \in B \setminus A$ allora $x^{-1} \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$, quindi $xx^{-1} = 1 \in \mathfrak{n}$, e ciò è palesemente assurdo. □

Osservazioni 4.19. (a) Si può dimostrare, con tecniche del tutto simili a quelle sopra impiegate, un enunciato leggermente più generale di quello del Teorema 4.15:
Sia A un sottoanello proprio di un campo K, e sia $\mathfrak{a}$ un ideale di A, $\mathfrak{a} \neq A$. Allora, esiste sempre (almeno) un anello di valutazione V di K, $A \subseteq V \subsetneq K$, tale che $\mathfrak{a}V \neq V$.

(b) Come applicazione del Corollario 4.17 si può dimostrare che se A è un dominio normale, anche $A[X]$ è un dominio normale.