Capitolo 6

Posti

Sia k un campo e sia ∞ un elemento non appartenente a k chamato, al solito, *infinito*. Consideriamo

$$k_\infty := k \sqcup \{\infty\}\,.$$

Poniamo per definizione:

$$\begin{aligned}
&a \pm \infty := \infty := \infty \pm a, \quad \forall a \in k;\\
&a \cdot \infty := \infty := \infty \cdot a, \quad \forall a \in k \setminus \{0\}\,;\\
&\infty \cdot \infty := \infty;\\
&\frac{1}{\infty} := 0,\\
&\frac{1}{0} := \infty.
\end{aligned}$$

Le espressioni:

$$\infty \pm \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$$

non sono definite ed in tal caso diremo che *tali espressioni non hanno senso*. Nel seguito, penseremo k canonicamente immerso in k_∞.

Definizione 6.1. Un *posto P di un campo K a valori su un campo k* è un'applicazione suriettiva:

$$P:\ K_\infty \longrightarrow k_\infty$$

tale che:

(1) $P(1) = 1$;

(2) $P(\infty) = \infty$;

(3) Presi $x, y \in K$, se $P(x) + P(y)$ ha senso, allora:

$$P(x+y) = P(x) + P(y);$$

(4) Presi $x, y \in K$, se $P(x)P(y)$ ha senso, allora:

$$P(xy) = P(x)P(y).$$

Osservazioni 6.2. (a) Si noti che, in generale, $P(K) \not\subseteq k$ (cioè può ben darsi che $x \in K$ sia tale che $P(x) = \infty$).

(b) Se accade che $P(K) \subseteq k$, allora $P : K \to k$ è un omomorfismo di campi. Viceversa, ogni omomorfismo di campi $j : K \to k$ definisce un posto $j_\infty : K_\infty \to k_\infty$ ponendo $j_\infty |_K = j$ e $j_\infty(\infty) = \infty$.

(c) La richiesta di suriettività per un posto non è essenziale. Infatti, ci si può ricondurre a questo caso, sostituendo k con il campo $k' := P(K) \cap k$.

(d) Si osservi che la composizione (= prodotto operatorio) di due posti (componibili) è ancora un posto. Cfr. l'Esempio 6.6.

(e) Il posto associato all'omomorfismo identità $id_K : K \to K$ si dice *posto banale di* K.

Proposizione 6.3. *Sia* $(A, \mathfrak{m}, k(A))$ *un anello di valutazione di un campo* K*. Allora, l'applicazione:*

$$\begin{array}{rcl} P_A : K_\infty & \longrightarrow & k(A)_\infty \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x + \mathfrak{m} & \textit{se } x \in A \\ \infty & \textit{se } x \in K \setminus A \end{cases} \end{array}$$

è un posto, chiamato posto associato all'anello di valutazione A.

Dimostrazione. La semplice verifica è lasciata come esercizio. □

Occupiamoci del problema reciproco, cioè di costruire un anello di valutazione a partire da un posto.

Teorema 6.4. *Sia* $P : K_\infty \to k_\infty$ *un posto. Allora:*

(a) *L'insieme*

$$A_P := P^{-1}(k) = \{x \in K \mid P(x) \in k\}$$

è un anello di valutazione di K *con ideale massimale:*

$$\mathfrak{m}_P := P^{-1}(0) = \{x \in K \mid P(x) = 0\}$$

Tale anello viene chiamato anello di valutazione associato al posto P

(b) $k(A_P)$ *è canonicamente isomorfo a* k.

Dimostrazione.

(a) Facciamo vedere che:

$$x \in K \setminus A_P \Rightarrow x^{-1} \in \mathfrak{m}_P.$$

Infatti:

$$x \in K \setminus A_P \iff P(x) = \infty \iff P(x^{-1}) = (P(x))^{-1} = \frac{1}{\infty} = 0 \iff x^{-1} \in \mathfrak{m}_P.$$

(b) Il nucleo dell'omomorfismo suriettivo di anelli:

$$P\,|_{A_P}\colon A_P \longrightarrow k$$

è esattamente $\mathfrak{m}_P$. □

Definizione 6.5. Due posti di un medesimo campo $P : K_\infty \to k_\infty$, $P' : K_\infty \to k'_\infty$ si dicono *equivalenti* se esiste un isomorfismo di campi $\sigma : k \to k'$ in modo che il seguente diagramma di posti sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} K_\infty \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "P'"'] & k_\infty \arrow[d, "\sigma_\infty"] \\ & k'_\infty \end{tikzcd}$$

(dove, ovviamente σ_∞ è il posto associato a σ e che manda ∞ su ∞).

È facile verificare che:

- dare un anello di valutazione di K equivale a
- dare una valutazione di K (a meno di equivalenza) equivale a
- dare un posto di K (a meno di equivalenza).

Nel seguito, secondo la convenienza, useremo il linguaggio delle valutazioni, oppure quello dei posti, oppure quello degli anelli di valutazione. Resti chiaro che (a meno di eventuali equivalenze) tali linguaggi sono perfettamente intercambiabili.

Per comodità diamo una "tabella di conversione" dei linguaggi.

Valutazioni con gruppo di valori con notazione moltiplicativa	Valutazioni con gruppo di valori con notazione additiva	Anelli di valutazione	Posti
$v\colon K \longrightarrow \Delta_0$ $v(x)=0 \iff x=0$ $v(xy)=v(x)v(y)$ $v(x+y)\leq \max(v(x), v(y))$	$v\colon K \longrightarrow \Gamma_\infty$ $v(x)=\infty \iff x=0$ $v(xy)=v(x)+v(y)$ $v(x+y)\geq \min(v(x), v(y))$	$(A, \mathfrak{m}, k)$ $A\subseteq K=Qz(A)$ $x\in K\setminus A\Rightarrow x^{-1}\in A$	$P\colon K_\infty \longrightarrow k_\infty$ $P(1)=1$ e $P(\infty)=\infty$ $P(xy)\overset{*}{=}P(x)P(y)$ $P(x+y)\overset{*}{=}P(x)+P(y)$ (* se ha senso)
$v(x)\leq 1$ $v(x)\lneq 1$ $v(x)=1$ $v(x)\gneq 1$	$v(x)\geq 0$ $v(x)\gneq 0$ $v(x)=0$ $v(x)\lneq 0$	$x\in A$ $x\in\mathfrak{m}$ $x\in\mathcal{U}(A)=A\setminus\mathfrak{m}$ $x\in K\setminus A$	$P(x)\in k$ $P(x)=0$ $P(x)\neq 0$ $P(x)\neq\infty$ $P(x)=\infty$

Tabella 6.1: Tabella di conversione

Esempio 6.6. In questo esempio vogliamo dare una costruzione esplicita di un posto P ottenuto mediante la composizione di due posti. Siano X e Y due indeterminate su un campo k e siano dati due posti P_1 e P_2:

$$\begin{array}{rcl} P_1 : k(X,Y)_\infty & \longrightarrow & k(X)_\infty \\ \frac{f(X,Y)}{g(X,Y)} & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(X,0)}{g(X,0)} & \text{se } g(X,0)\neq 0; \\ \infty & \text{altrimenti;} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P_2 : k(X)_\infty & \longrightarrow & k_\infty \\ \frac{f(X)}{g(X)} & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(0)}{g(0)} & \text{se } g(0) \neq 0; \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{array}$$

Gli anelli associati a P_1 e P_2 sono rispettivamente:

- $A_{P_1} = k(X)[Y]_{(Y)} = P_1^{-1}(k(X))$ e
- $A_{P_2} = k[X]_{(X)} = P_2^{-1}(k)$.

Il posto $P := P_2 \circ P_1$ è allora il posto associato all'anello di valutazione $k\,[X]_{(X)} + Yk(X)\,[Y]_{(Y)}$ e dunque alla valutazione $(\mathrm{ord}^X, \mathrm{ord}^Y)$ (cfr. Esempi 3.10, 6 e 4.7, 6).

Teorema 6.7. *Se E è un'estensione di un campo K e se P è un posto di K, allora esiste (almeno) un posto Q di E la cui restrizione a K è equivalente a P.*

Tale risultato non è altro che una riformulazione (con linguaggio dei posti) del Corollario 4.16. Data l'importanza di tale risultato diamo i cenni di una sua dimostrazione con tecniche e linguaggio attinenti alla teoria dei posti.

Lemma 6.8. *Sia A un sottoanello di un anello B. Supponiamo che B sia intero su A e che L sia un campo algebricamente chiuso. Dato comunque un omomorfismo $f : A \longrightarrow L$, esiste sempre (almeno) un omomorfismo $g : B \longrightarrow L$ che estende f a B (cioè $g\,|_A = f$).*

Dimostrazione. (Riduzione al caso A locale e $\ker(f)$ ideale massimale di A). Sia $\mathfrak{p} := \ker(f)$, $S := A \setminus \mathfrak{p}$, allora abbiamo un diagramma commutativo di omomorfismi canonici:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}} \arrow[d, hook] \\ B \arrow[r] & S^{-1}B \end{tikzcd}$$

nel quale $S^{-1}B = \tilde{B}$ è intero su $A_{\mathfrak{p}} = \tilde{A}$, per le proprietà delle estensioni intere. Dal momento che $f : A \longrightarrow L$ si estende canonicamente (ed in modo unico) ad un omomorfismo $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow L$, dimostrare il Lemma 6.8 equivale a dimostrare il seguente Lemma. □

Lemma 6.9. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale, sottoanello di un anello B. Supponiamo che B sia intero su A e che L sia un campo algebricamente chiuso. Dato comunque un omomorfismo $f : A \longrightarrow L$, tale che $\ker(f) = \mathfrak{m}$, allora esiste sempre un omomorfismo $g : B \longrightarrow L$ che estende f.*

Dimostrazione. Per il Teorema del Lying-Over (Teorema 2.8) e per la Proposizione 2.7 (g), sappiamo che esiste un ideale massimale M di B tale che $M \cap A = \mathfrak{m}$. Ora, dal momento che

$$f(A) \cong \frac{A}{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \frac{B}{M}$$

è un'estensione intera (= algebrica) di campi, e che $f(A)$ è contenuto in L che è algebricamente chiuso, possiamo affermare che $\frac{B}{M}$ è isomorfo ad un sottocampo di L. Dunque, abbiamo un diagramma commutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, hook] & & \frac{A}{\mathfrak{m}} \arrow[dl, hook] \arrow[dd, hook] \\
& L & \\
B \arrow[rr, two heads] \arrow[ur, dotted, "g"] & & \frac{B}{M} \arrow[ul, dotted, hook]
\end{tikzcd}$$

Pertanto l'omomorfismo g, cercato, si può prendere uguale alla composizione $B \twoheadrightarrow \frac{B}{M} \hookrightarrow L$. □

Lemma 6.10. *Sia A un sottoanello di un campo K e sia L un campo algebricamente chiuso. Allora, dato comunque un omomorfismo*

$$f : A \longrightarrow L$$

esiste (almeno) un sottoanello B di K massimale nella famiglia dei sottoanelli di K sui quali è definita un'estensione di f.

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma di Zorn alla famiglia non vuota (ordinata rispetto all'inclusione):

$$\mathcal{S} := \{(C,\, h) \mid C \subseteq K,\ h : C \to L \text{ è un'estensione di } f\} \quad \square$$

Dimostrazione del Teorema 6.7. Sia $(A,\, \mathfrak{m},\, k)$ l'anello di valutazione associato al posto $P : K_\infty \to k'_\infty$, cioè $A := P^{-1}(k')$. Pensiamo A come sottoanello del campo E. Sia $\bar{k}$ la chiusura algebrica del campo residuo k di A. Sia

$$f : A \twoheadrightarrow k \hookrightarrow \bar{k}$$

l'omomorfismo canonico (ottenuto componendo la proiezione $A \to \frac{A}{\mathfrak{m}}$ con l'inclusione $k \subseteq \bar{k}$). Allora, per il Lemma 6.10, esiste un sottoanello B di E, che contiene A, che è massimale nella famiglia dei sottoanelli di E sui quali è definita un'estensione di f.
Per la massimalità di B, si ricava immediatamente che B deve essere locale, sia M il suo ideale massimale. Sia $g : B \to \bar{k}$ l'omomorfismo che estende f. Definiamo

$$Q : E_\infty \longrightarrow \bar{k}_\infty$$

ponendo $Q\mid_B = g$, $Q(E \setminus B) = \infty$ (in particolare: $\infty = Q\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = g(\alpha)g(\beta)^{-1}$ se $\alpha, \beta \in B,\ \alpha \notin \beta B,\ \beta \neq 0$). La verifica che Q è un posto di E che "estende" P

e , quindi, che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, hook] & k \arrow[r, hook] & \bar{k} \arrow[dd, hook] \\
 & B \arrow[ur, "g"'] \arrow[dd, hook] & \\
K_\infty \arrow[r, two heads, "P"] \arrow[dr, hook] & k_\infty \arrow[r, hook] & \bar{k}_\infty \\
 & E_\infty \arrow[ur, "Q"'] &
\end{tikzcd}$$

è lasciata come esercizio (ovviamente, l'applicazione Q in questo caso non sarà suriettiva).
(Suggerimento: "basta" verificare che (B, M) è un anello di valutazione di E che domina $(A, \mathfrak{m})$. Altrimenti rimanendo "fedeli" alla teoria dei posti, per mostrare che Q è un posto basta dimostrare il seguente enunciato:
Sia A un sottoanello di un campo K e sia $x \in K$, $x \neq 0$. Dato un omomorfismo $f : A \to L$, con L algebricamente chiuso, esiste sempre un omomorfismo che estende f e che ha come dominio $A[x]$ oppure $A\left[x^{-1}\right]$.
Ci sembra opportuno richiamare l'attenzione sull'analogia di tale enunciato con il Lemma 4.14 a pag. 39). $\square$