Capitolo 9

Estensioni delle valutazioni discrete canoniche dei campi di serie formali

Sia k un campo fissato. Sia:

$$k\,[[T]] := \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n T^n \,\middle|\, a_n \in k \right\}$$

l'anello delle serie formali a coefficienti in k ed in una indeterminata e sia:

$$k\,((T)) := \left\{ \sum_{n \geq -N} a_n T^n \,\middle|\, a_n \in k,\ N \geq 0 \right\}$$

il campo dei quozienti di $k\,[[T]]$. Abbiamo già visto che l'applicazione:

$$\mathrm{ord}:\ k\,((T)) \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$$

è una valutazione discreta normalizzata, che ha come anello di valutazione associato $k\,[[T]]$, il quale è un PID locale il cui ideale massimale è generato dall'uniformizzante T.

Presa comunque una serie formale non zero $x \in k\,[[T]]$, ovviamente

$$x = uT^n \quad \text{con} \quad u \in \mathcal{U}\,(k\,[[T]])\,,\ n \geq 0$$

(cioè $u = u_0 + u_1 T + \dots$, con $u_0 \neq 0$).

Proposizione 9.1. *Sia $x = uT^n \in k\,[[T]]$, con $u \in \mathcal{U}\,(k\,[[T]])$, $n \geq 0$. Poniamo:*

$$\begin{aligned} k\,((x)) &:= \left\{ \sum_{h \geq -N} a_h x^h \,\middle|\, a_h \in k,\ N \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{h \geq -N} a_h u^h T^{hn} \,\middle|\, a_h \in k,\ N \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Allora, $k((T))$ è un'estensione algebrica finita di $k((x))$, più precisamente:

$$[k((T)) : k((x))] = \mathrm{ord}(x) = n.$$

Dimostrazione. Non è difficile dimostrare che ogni serie $f(T) \in k((T))$ si può scrivere in modo unico nella maniera seguente:

$$f(T) = 1 \cdot f_0(x) + Tf_1(x) + \cdots + T^{n-1}f_{n-1}(x)$$

dove $f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x) \in k((x))$ sono facilmente calcolabili a partire da $f(T)$. Dunque $1, T, \ldots, T^{n-1}$ formano una base di $k((T))$ come $k((x))$-spazio vettoriale. $\square$

La proposizione successiva inverte, nel caso di campi di coefficienti algebricamente chiusi, la Proposizione 9.1. Ad essa premettiamo le seguenti utili:

Osservazioni 9.2. (a) Sia E un'estensione finita di un campo K. Sia $w : E \to \Gamma_\infty$ una valutazione discreta non banale di E e sia $v := w\,|_K\colon\ K \to \Gamma'_\infty$ la sua restrizione a K. Denotiamo con $e := e(w, v)$ l'indice di ramificazione di w su v. Ebbene, per ogni $z \in K \setminus \{0\}$, risulta:

$$\mathrm{ord}_w(z) = e \cdot \mathrm{ord}_v(z).$$

Ciò discende dal fatto che se:

$$\sigma : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

è l'isomorfismo tra il gruppo ciclico ordinato e $\mathbb{Z}$, allora σ ristretto a Γ' realizza un isomorfismo del tipo:

$$\sigma\,|_{\Gamma'}\colon\ \Gamma' \xrightarrow{\sim} e\mathbb{Z}$$

Quindi, se $i : e\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ è l'inclusione canonica e se $\epsilon : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} e\mathbb{Z}$ è l'isomorfismo naturale $x \mapsto ex$ allora, abbiamo un diagramma commutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\mathrm{ord}_w"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathbb{Z}_\infty \\
& \Gamma_\infty \arrow[ur, "\sigma_\infty", "\sim"'] & \\
& \Gamma'_\infty \arrow[u, hook] \arrow[r, "(\sigma|_{\Gamma'})_\infty", "\sim"'] \arrow[dr, "\tau_\infty", "\sim"'] & (e\mathbb{Z})_\infty \arrow[uu, hook] \\
K \arrow[uuu, hook] \arrow[ur, "v"] \arrow[rr, "\mathrm{ord}_v"'] & & \mathbb{Z}_\infty \arrow[u, "\epsilon_\infty"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

(dove $\tau : \Gamma' \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ è l'isomorfismo di gruppi ciclici ordinati). La conclusione è ormai immediata.

(b) Sia v una valutazione di un campo K banale su un sottocampo k di K (cioè, se $(A_v,\, \mathfrak{m}_v,\, k(A_v))$ è l'anello di v allora k è contenuto dentro A_v). Sia

E un'estensione finita di K. Supponiamo che k sia algebricamente chiuso. Allora, è facile osservare che ogni valutazione w di E che estende K (è banale su k e) verifica la condizione **(G)**. Infatti, se $(B_w,\, \mathfrak{n}_w,\, k(B_w))$ è l'anello di w, allora:

$$[k(B_w) : k] \leq [E : K] \qquad \text{(Proposizione 5.6)}$$

Essendo k algebricamente chiuso, ogni estensione algebrica (finita) di k deve coincidere (a meno di isomorfismi) con k.
Tale risultato si applica (ovviamente anche) al caso $E = K$. Quindi, ogni valutazione di un campo K che è banale su un suo sottocampo algebricamente chiuso k verifica alla condizione **(G)**.

Proposizione 9.3. *Sia k un campo algebricamente chiuso e sia E un'estensione finita del campo di serie $k\,((X))$.*

(a) Esiste un'unica estensione ad E della valutazione discreta canonica:

$$\mathrm{ord} :\ k\,((X)) \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$$

(b) Se t è un parametro locale per la valutazione discreta w di E che estende ord*, e se:*

$$e := e(w,\, \mathrm{ord})$$

allora, l'omomorfismo canonico

$$E \hookrightarrow k\,((t)) \qquad \textit{(cfr. Osservazione 7.2)}$$

è un isomorfismo ed, inoltre:

$$[E : k\,((X))] = [k\,((t)) : k\,((X))] = e = \mathrm{ord}_w(X).$$

Dimostrazione. Già sappiamo che esiste una valutazione discreta $w :\ E \to \Gamma_\infty$ che estende $\mathrm{ord} :\ k\,((X)) \to \mathbb{Z}_\infty$ e che:

$$e(w,\, \mathrm{ord}) \leq [E : k\,((X))] \qquad \text{(cfr. Proposizione 5.6)}$$

Se dimostriamo che $e = [E : k\,((X))]$, allora necessariamente tale estensione sarà unica (cfr. Corollario 8.8). Inoltre, come conseguenza ricaveremo anche le conclusioni annunciate in (b).

Sia $\sigma :\ \Gamma \to \mathbb{Z}$ l'isomorfismo canonico tra gruppi ciclici ordinati. Dal momento che $e = [\Gamma : \Gamma']$ dove $\Gamma' = \mathbb{Z}$ è il gruppo dei valori di ord, allora, $\sigma\,|_{\mathbb{Z}}\colon\ \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} e\mathbb{Z}$. Dunque, abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
k\,((t)) \arrow[rr, "\mathrm{ord}_w"] & & \mathbb{Z}_\infty \\
E \arrow[u, hook] \arrow[r, "w"] & \Gamma \arrow[ur, "\sigma_\infty", "\sim"'] & \\
k\,((X)) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{ord}"] & \mathbb{Z}_\infty \arrow[u, hook] \arrow[r, "(\sigma|_{\mathbb{Z}})_\infty", "\sim"'] & (e\mathbb{Z})_\infty \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

Pertanto $\mathrm{ord}_w(X) = e \cdot \mathrm{ord}(X) = e$, cioè:

$$X = ut^e \quad \text{con} \quad u \in \mathcal{U}(A_w) \subseteq k\,((t))$$

Quindi, per la Proposizione 9.1,

$$[k((t)) : k((X))] = \mathrm{ord}_w(X) = e$$

Essendo:

$$e \leq [E : k((X))] \leq [k((t)) : k((X))] = e$$

ovviamente:

$$[E : k((X))] = e$$

e quindi:

$$E \cong k((t)) .$$

$\square$