Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Studi in Matematica, A.A. 2009/2010

TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri

5 marzo 2010

1. Dimostrare per induzione su n che $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$.
2. Per ogni intero $n \geq 1$ denotiamo con $\mathfrak{P}_n$ un insieme di n rette nel piano in posizione generica (cioè non parallele e non incidenti a tre a tre). Dimostrare per induzione che $\mathfrak{P}_n$ ripartisce il piano in $1 + \binom{n+1}{2}$ regioni disgiunte.
3. **(a)** Dimostrare che $MCD(839, 172) = 1$.

   (b) Trovare un inverso aritmetico di 172 modulo 839.
4. Sia p un numero primo e $a \in \mathbb{N}$ tale che $1 \leq a < p^2$. Quali a sono privi di inverso aritmetico modulo p^2?
5. Risolvere la seguente equazione congruenzale lineare indicandone un sistema completo di soluzioni: $56X \equiv 14 \pmod{35}$.
6. Risolvere l'equazione congruenzale lineare $6X \equiv 15 \pmod{n}$ per $n = 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23$ indicandone un sistema completo di soluzioni modulo n.
7. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ non si può mai avere

$$a^2 + b^2 \equiv 3 \pmod{4}.$$