Universit degli Studi di Roma Tre

Corso di Studi in Matematica, A.A. 2008/2009

TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri

9 aprile 2010

1. Si risolvano, se possibile, i seguenti sistemi di congruenze lineari in una incognita:

$$\text{a)} \begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod{6} \\ 2x \equiv -4 \pmod{7} \\ -x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ 6x \equiv -5 \pmod{13} \\ x \equiv -2 \pmod{3} \\ 3x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{10} \\ 4x \equiv -1 \pmod{15} \end{cases} \qquad \text{d)} \begin{cases} 5x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv -5 \pmod{14} \\ 7x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

2. Si determinino i valori (interi) del parametro λ affinché i seguenti sistemi siamo risolubili e si calcolino le corrispondenti soluzioni.

$$\text{a)} \begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{5} \\ 2x \equiv \lambda \pmod{6} \\ 9x \equiv 2 \pmod{13} \end{cases} \qquad (0 \leq \lambda \leq 5)$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{15} \\ x \equiv -10 \pmod{21} \\ 7x \equiv 4\lambda \pmod{9} \end{cases} \qquad (0 \leq \lambda \leq 8)$$

3. Si determinino i valori (interi) dei parametri λ, μ affinché i seguenti sistemi siamo risolubili e si calcolino le corrispondenti soluzioni.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + \lambda y \equiv 1 \pmod{3} \\ x - \mu \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \qquad (0 \leq \mu, \lambda \leq 2)$$

$$\text{b)} \begin{cases} -6x + 5y \equiv \lambda \pmod{7} \\ x + 3 \equiv -4\mu \pmod{7} \end{cases} \qquad (0 \leq \lambda \leq 6,\ \ 3 \leq \mu \leq 5)$$

4. Si dimostri che per ogni intero $a \in \mathbb{Z}$ e per $p = 2, 3, 5, 7, 11$ risulta $a^{121} \equiv a (\mathrm{mod} p)$.

5. Si dimostri che se p é primo allora $6(p-4)! \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$.

6. Si dimostri che per ogni intero $a \in \mathbb{Z}$ e per ogni numero primo p risulta

   a) $p | a^p + (p-1)! a$

   b) $p | (p-1)! a^p + a$

7. Si risolva la seguente equazione polinomiale:

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 4 \equiv 0 (\mathrm{mod} 24).$$