Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

a.a. 2006/2007
Gabriele Fusacchia e Valeria Pucci
6 Marzo 2007 - Tutorato II

(1) Trovare $24 \leq n \leq 34$ tale che

$$\{220, 18, 74, 571, 245, 895, 688, 38, 23, 123, n\}$$

sia un sistema completo di residui (modulo 11).

(2) Trovare tutte le eventuali soluzioni delle seguenti congruenze lineari:

(a) $21X \equiv 9 \pmod{15}$

(b) $33X \equiv 4 \pmod{20}$

(c) $78X \equiv 8 \pmod{52}$

(d) $69X \equiv 9 \pmod{36}$

(e) $18X \equiv 30 \pmod{42}$

(f) $34X \equiv 60 \pmod{98}$

(g) $24X \equiv 81 \pmod{32}$

(3) Dimostrare che il prodotto di tre interi consecutivi è divisibile per 6, e che il prodotto di quattro numeri consecutivi è divisibile per 24.

(4) Dimostrare che, per ogni intero n, $n^2 + 2$ non è mai divisibile per 4.

(5) Sia $a = 2375410739$. Determinare la classe di congruenza di a e di a^2 (modulo 4).

(6) Sia data la seguente equazione diofantea in tre indeterminate:

$$28X^3 + 15Y^3 + 105Z^9 = 16$$

Dimostrare che essa non ammette soluzioni.
(*Suggerimento*: data un'equazione diofantea $f(X_1, \ldots, X_r) = 0$, se esiste un n tale che la congruenza $f(X_1, \ldots, X_r) \equiv 0 \pmod{n}$ non ammette soluzioni, allora anche l'equazione iniziale non ha soluzioni. Si trovi ad esempio un primo $p > 3$ tale che l'equazione ridotta (modulo p) non abbia soluzioni)