TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri - A.A. 2006/2007

Esercitazione in classe in preparazione della I Prova di Valutazione

ESERCIZIO 1. Dimostrare esplicitamente che, per ogni primo $p > 2$, sussiste la seguente congruenza $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.

ESERCIZIO 2. Determinare, al variare di λ e di μ, con $10 \leq \lambda \leq 12$ e $1 \leq \mu \leq 2$, tutte le (eventuali) soluzioni del seguente sistema di congruenze lineari in due indeterminate:

$$\begin{cases} 3\lambda X + Y \equiv 3\mu \pmod{13} \\ 7X + 2Y \equiv 4 \pmod{13}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$f(X) := X^2 + 12X + 20 \equiv 0 \pmod{30}.$$

ESERCIZIO 4. Per ogni intero $n \geq 1$ sia

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d).$$

(a) Determinare se F è una funzione moltiplicativa.
(b) Determinare se F è una funzione totalmente moltiplicativa.
(c) Dimostrare che se n è un intero positivo pari allora $F(n) = 0$.
(d) Determinare $F(35)$ e $F^{-1}(35)$.
(e) Sia f la funzione moltiplicativa tale che $F = \sigma_f$. Determinare $f(35)$.

ESERCIZIO 5. La compagnia aerea MayDayAir offre due tipi di biglietti tra Roma e Neverland:
Business Class **9,90 Euro** e
Economy Class **5,90 Euro**.
Se il ricavato della vendita dei biglietti ha fruttato alla compagnia **756,60 Euro**, quanti biglietti di ciascun tipo sono stati venduti ?

ESERCIZIO 6. Si consideri l'equazione diofantea in due indeterminate

$$(2\lambda + 4)X + 5Y = 16$$

(1) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione ha soluzione.
(2) Determinare tutte le soluzioni per il più piccolo $\lambda \geq 0$ per cui l'equazione ha soluzione.

Soluzioni

1. Basta notare che, per il teorema di Wilson $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, quindi
$$-1 \equiv (p-1)((p-2)!) \equiv -1((p-2)!).$$
Pertanto, moltiplicando ambo i membri per l'inverso aritmetico di $-1 \pmod p$ (che è $-1 \pmod p$), otteniamo la conclusione.

2. $\Delta_\lambda = 6\lambda - 7$. Si vede che $\Delta_\lambda \equiv 0 \pmod{13}$ se e soltanto se $\lambda \equiv 11 \cdot 7 \equiv 12 \pmod{13}$.

Per $(\lambda, \mu) = (10, 1)$ il sistema ha un'unica soluzione $(x, y) = (2, 8) \pmod{13}$.
Per $(\lambda, \mu) = (10, 2)$ il sistema ha un'unica soluzione $(x, y) = (8, 0) \pmod{13}$.
Per $(\lambda, \mu) = (11, 1)$ il sistema ha un'unica soluzione $(x, y) = (4, 1) \pmod{13}$.
Per $(\lambda, \mu) = (11, 2)$ il sistema ha un'unica soluzione $(x, y) = (3, 11) \pmod{13}$.
Per $\lambda = 12$ e $\mu = 1, 2$ il sistema non ammette soluzioni $\pmod{13}$.

3. $f(X) \equiv 0 \pmod 2$ ha un'unica soluzione $y_{1,1} \equiv 0 \pmod 2$.
$f(X) \equiv 0 \pmod 3$ ha due soluzione $y_{2,1} \equiv 1 \pmod 3$ e $y_{2,2} \equiv 2 \pmod 3$,
$f(X) \equiv 0 \pmod 5$ ha due soluzione $y_{3,1} \equiv 0 \pmod 5$ e $y_{3,2} \equiv 3 \pmod 5$.
Da cui, tramite il Teorema Cinese dei Resti, si ricava che:
$f(X) \equiv 0 \pmod{30}$ ha quattro soluzioni $\{8, 10, 20, 28\} \pmod{30}$.

4. (a) Osservando che $F = \mu\varphi * \mathbf{1}$ si ottiene immediatamente che F è moltiplicativa.

(b) F non è totalmente moltiplicativa, infatti per esempio $F(9) = F(3) = -1$ e quindi $F(9) \neq F(3)F(3)$.

(c) Basta osservare che $F(2^k) = \mu(1)\varphi(1) + \mu(2)\varphi(2) = 0$ e utilizzare (a).

(d) $F(35) = F(7)F(5) = (-5)(-3) = 15$. Per calcolare F^{-1}, osserviamo che se p è un numero primo allora $F^{-1}(p) = -F(p)$. Quindi $F^{-1}(35) = F^{-1}(7)F^{-1}(5) = (-F(7))(-F(5)) = F(35)$.

(e) Si noti che $F = \mu\varphi * \mathbf{1} = \sigma_{\mu\varphi}$. Pertanto $f = \mu\varphi$ e $f(35) = 24$.

5. Basta trovare le soluzioni (x, y) (con entrambe le componenti non negative) dell'equazione diofantea $99X + 59Y = 7566$.

La congruenza $99X \equiv 7566 \pmod{59}$ ha come unica soluzione $x \equiv 21 \pmod{59}$. Per $x = 21$ da $59Y = 7566 - 99 \cdot 21$ si ricava la soluzione $y = 93$. Si vede che questa coppia $(x, y) = (21, 93)$ determina l'unica soluzione (con entrambe le componenti non negative) del problema dato.

Come ulteriore verifica, si può osservare che la congruenza $59Y \equiv 7566 \pmod{99}$ ha come unica soluzione $y \equiv -6 \equiv 93 \pmod{99}$.

6. (a) L'equazione ha soluzione se e soltanto se $\mathrm{MCD}(2\lambda + 4, 5) | 16$, quindi se e solo se $\mathrm{MCD}(2\lambda + 4, 5) = 1$, se e solo se $2\lambda + 4 \not\equiv 0 \pmod 5$. Ne segue che l'equazione ha soluzione se e solo se $\lambda \not\equiv 3 \pmod 5$.

(b) Per $\lambda = 0$, le soluzioni sono (x_t, y_t) dove $x_t = 4 + 5t$, $y_t = -4t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.