Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
Tutorato 1 - 1 Marzo 2010
Elisa Di Gloria

ESERCIZI DA SVOLGERE IN CLASSE

Esercizio 1.
Utilizzando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$;

c) $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$;

d) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

Esercizio 2.
Utilizzando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \geq 0$ e per ogni $x \neq 1$ si ha:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + \frac{x^n}{(1-x)}$$

Esercizio 3.
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$$

Esercizio 4.
Utilizzando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

a) $7 \mid 2^{3n} - 1$;

b) $8 \mid 3^{2n} + 7$;

c) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$;

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 1.
Utilizzando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

a) $2n \geq n + 1$;

b) $2^n \geq 2n$;

c) $(-1)1 + (-1)^2 2^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio 2.
Verificare che per ogni intero a si ha:

a) $2 \mid a(a+1)$;

b) $4 \nmid a^2 + 2$;

Esercizio 3.
Dimostrare che il prodotto di tre interi consecutivi è divisibile per 6, e che il prodotto di quattro numeri consecutivi è divisibile per 24.

Esercizio 4.
Un intero positivo si dice *triangolare* se è somma di interi consecutivi a partire da 1.

a) Un intero è triangolare se e solo se è della forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$ per qualche $n \geq 1$ (Pitagora, circa 550 a.C.)

b) Un numero intero m è un numero triangolare se e solo se $8m + 1$ è un quadrato perfetto (Plutarco, circa 100 d.C.)

c) La somma di due numeri triangolari successivi è un quadrato perfetto. (Nicomaco, circa 100 d.C.)

d) Se t_n denota l'n-esimo numero triangolare, allora

$$t_n = \binom{n+1}{2}$$