Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
Tutorato 10 - 17 Maggio 2010
Elisa Di Gloria

Esercizio 1.
Siano $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$ e $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$. Provare che:

(a) $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$;

(b) $\sum_{d|n} \sigma(d) = n \sum_{d|n} \frac{\tau(d)}{d}$;

(c) $\sum_{d|n} d\tau(d) = n \sum_{d|n} \frac{\sigma(d)}{d}$.

Esercizio 2.

(a) Sia f una funzione aritmetica, e sia $F(n) := \sum_{d|n} f(d)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che F è moltiplicativa se e soltanto se lo è f.

(b) Dimostrare che, per ogni intero $k \geq 1$, la funzione

$$\sigma^k(n) := \sum_{d|n} d^k$$

è una funzione moltiplicativa.

Esercizio 3.
Sia $\varphi(n)$ la funzione di Eulero. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

(a) n dispari $\Rightarrow \varphi(2n) = \varphi(n)$;

(b) n pari $\Rightarrow \varphi(2n) = 2\varphi(n)$;

(c) $\varphi(3n) = \begin{cases} 3\varphi(n), & \text{se } 3 \mid n \\ 2\varphi(n), & \text{altrimenti} \end{cases}$

(d) $n = 2\varphi(n) \Leftrightarrow n = 2^e$ per qualche $e \geq 1$.

Esercizio 4. Definiamo le seguenti funzioni aritmetiche: per ogni $n \geq 1$:

$$F(n) = \sum_{d|n} \sigma(\frac{n}{d})\tau(d) \qquad G(n) = \sum_{d|n} \sigma(\frac{n}{d})\varphi(d)$$

(a) Calcolare $F(60)$ e $G(90)$;

(b) Determinare due funzioni aritmetiche f e g tali che $F = f*1$ e $G = g*1$, dove 1 è la funzione costante di valore 1. Calcolare $f(28)$ e $g(15)$.