1 Principio di Induzione

Per numeri naturali, nel linguaggio comune, si intendono i numeri interi non negativi $0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\ldots$.

Da un punto di vista insiemistico–costruttivo, a partire dall'esistenza dell'insieme vuoto $\emptyset$, si possono definire i *numeri naturali* ponendo:

$$0 := \emptyset\,,\ 1 := \{0\}\,,\ 2 := \{0,1\}\,,\ 3 := \{0,1,2\}\,,\ \ldots\ldots$$

Si assume (nella teoria assiomatica degli insiemi) che la *costruzione ricorsiva* sopra descritta (ogni elemento è definito a partire dalla conoscenza di un elemento "che lo precede") dia luogo ad *un insieme* non finito:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, n+1, \ldots\ldots\}$$

detto *insieme dei numeri naturali* . (Il postulato dell'esistenza di un insieme costituito da una infintà di oggetti individuali, quale è $\mathbb{N}$, viene chiamato *Assioma dell'Infinito*).

Per ogni elemento (*numero naturale*) $x \in \mathbb{N}$, si pone:

$$\mathrm{succ}(x) := x + 1 := \{0, 1, 2, \ldots, x\}\,,$$

un tale elemento di $\mathbb{N}$ viene chiamato *il successivo del numero naturale* x.

Una descrizione assiomatica, puramente formale, dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è stata data da G. Peano (1858-1932):

L'insieme $\mathbb{N}$ *è un insieme dotato di "una operazione di passaggio al successivo" (cioè, un'applicazione* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ x \mapsto \mathrm{succ}(x)$*) che verifica le seguenti proprietà:*

($\mathbb{N}$ 1) *Esiste un elemento* $0 \in \mathbb{N}$*, tale che* $0 \neq \mathrm{succ}(x)$*, per ogni* $x \in \mathbb{N}$*, (tale elemento viene chiamato* zero *o* primo elemento di $\mathbb{N}$*).*

($\mathbb{N}$ 2) *Se* $x, y \in \mathbb{N}$ *e se* $x \neq y$ *, allora* $\mathrm{succ}(x) \neq \mathrm{succ}(y)$.

($\mathbb{N}$ 3) *Se* U *è un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *tale che*

$$\textbf{(a)}\ \ 0 \in U\,, \qquad \textbf{(b)}\ \ k \in U \quad \Rightarrow \quad \mathrm{succ}(k) \in U\,,$$

allora $U = \mathbb{N}$.

Le precedenti proprietà sono chiamate *Postulati (*od *Assiomi) di Peano.* La proprietà **($\mathbb{N}$ 3)** è chiamata *Principio di Induzione.*

I postulati di Peano *caratterizzano* l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, nel senso che è possibile dimostrare che *esiste ed è unico* (a meno di corrispondenze biunoviche che conservano il primo elemento e l'operazione di "passaggio al successivo") un insieme che verifica tali proprietà. Per tale ragione, il sistema di assioni di Peano si dice "un sistema monomorfo".

È importante evidenziare che, dagli assiomi di Peano, discendono tutte le ben note proprietà dell'insieme dei numeri naturali. In particolare le operazioni di somma e prodotto e le ben note proprietà di tali operazioni possono essere dedotte dagli assiomi di Peano. Per *somma di* $n, m \in \mathbb{N}$ si intende il numero naturale:

$$\begin{aligned} n+0 :=&\ \ n\,, \quad n+1 := \operatorname{succ}(n)\,, \quad \text{e se } m \geqslant 2\,, \\ n+m :=&\ \ \operatorname{succ}^m(n) := \operatorname{succ}(\operatorname{succ}^{m-1}(n)) = \underbrace{(\ldots((n+1)+1)+1\ldots)}_{m \text{ volte}}\,, \end{aligned}$$

e per *prodotto di* $n, m \in \mathbb{N}$ si intende il numero naturale:

$$nm := \underbrace{n+n+n+\ldots+n}_{m \text{ volte}}\,, \quad \text{se } m \geqslant 1\,; \quad n0 := 0\,.$$

La *relazione di ordine in* $\mathbb{N}$ è definita nella maniera seguente:

$$h \leqslant k \quad :\Leftrightarrow \quad k = h+n\,, \text{ per un qualche } n \in \mathbb{N}\,.$$

Ovviamente, $h < k \ :\Leftrightarrow\ h \leqslant k$ e $h \neq k$. Dunque, $h < k \ \Rightarrow\ h+1 \leqslant k$.

Per semplicità di notazione, nel seguito, denoteremo con $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *l'insieme dei numeri naturali positivi.* Porremo, poi, $\mathbb{N}^- := \{-n \ :\ n \in \mathbb{N}^+\}$ e $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$.

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei *numeri interi,* o *numeri interi relativi,* (e, quindi, i suoi sottoinsiemi $\mathbb{N}^-$, $\mathbb{N}^+$) viene introdotto in maniera più rigorosa come insieme-quoziente dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rispetto alla relazione di equivalenza seguente:

$$(n,m) \sim (n',m') \quad :\Leftrightarrow n+m' = m+n'\,.$$

Un elemento dell'insieme-quoziente $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$, determinato dalla classe di equivalenza di $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, viene denotato con il simbolo $n-m$, i.e.

$$n-m := [(n,m)]_\sim := \{(n',m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ :\ n+m' = m+n'\}\,.$$

Per semplicità di notazione, presi comunque $n, m \in \mathbb{N}$, nell'insieme $\mathbb{Z}$ si pone $-m := 0-m$, $n := n-0$ (identificando così $\mathbb{N}$ con la sua immagine canonica in $\mathbb{Z}$, tramite l'applicazione iniettiva $n \mapsto n-0$); dunque, in particolare, $0 = 0-0 = n-n$. In tal modo si definiscono, in modo rigoroso, $\mathbb{N}^+ := \{n \ :\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$ e $\mathbb{N}^- := \{-m \ :\ m \in \mathbb{N},\ m \neq 0\}$ come sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$.

È subito visto che in $\mathbb{Z}$ possono essere (ben) definite in modo naturale, a partire da quelle di $\mathbb{N}$, le operazioni di somma, prodotto e una relazione di ordine:

$$\begin{aligned} (n-m)+(n'-m') \ &:=\ (n+n')-(m+m')\,, \\ (n-m)\cdot(n'-m') \ &:=\ (nn'+mm')-(nm'+mn')\,, \\ (n-m) \leq (n'-m') \ &:\Leftrightarrow\ n+m' \leq n'+m\,. \end{aligned}$$

In altri termini, l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi (relativi) è "il più piccolo insieme" che contiene $\mathbb{N}$ nel quale è sempre possibile risolvere un'equazione lineare in una indeterminata X a coefficienti in $\mathbb{N}$ del tipo seguente:

$$m + X = n\,, \quad \text{con } \ n, m \in \mathbb{N}\,,$$

la cui unica soluzione (in $\mathbb{Z}$) è data da $n - m$.

Si noti anche che, dalla decomposizione $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$, si ricava la cosìdetta *Legge di Tricotomia* in $\mathbb{Z}$, cioè: *presi comunque $x, y \in \mathbb{Z}$ allora può accadere soltanto una delle seguenti eventualità:*

$$x < y \quad \textit{oppure} \quad x = y \quad \textit{oppure} \quad y < x\,.$$

Pertanto, $\mathbb{Z}$ è un *insieme totalmente* o *linearmente ordinato*, ciò significa che, presi comunque due elementi $x, y \in \mathbb{Z}$, allora:

$$x \nleqslant y \quad \Rightarrow \quad y < x\,.$$

È opportuno notare che la validità del Principio di Induzione si trasferisce da $\mathbb{N}$ ad appropriati sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$, che sono in corrispondenza biunivoca naturale con $\mathbb{N}$. Precisamente, preso comunque un intero $n_0 \in \mathbb{Z}$, poniamo:

$$\mathbb{N}(n_0) := \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x \geqslant n_0\}\,,$$

allora possiamo affermare che in $\mathbb{N}(n_0)$ $(\subset \mathbb{Z})$ vale la seguente formulazione del:

(I) Principio di Induzione. *Sia $U \subseteq \mathbb{Z}$ tale che:*

$$\textbf{(a)}\ n_0 \in U\,, \qquad \textbf{(b)}\ k \in U \quad \Rightarrow \quad k+1 \in U\,,$$

allora $U = \mathbb{N}(n_0)\,.$

Osservazione 1.1. Si noti che l'applicazione:

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}(n_0)\,, \quad n + n_0\,,$$

è un'applicazione biiettiva che manda il primo elemento di $\mathbb{N}$ (cioè, l'elemento 0) nel primo elemento di $\mathbb{N}(n_0)$ (cioè, l'elemento n_0) e che preserva l'operazione di passaggio al successivo.

Sul Principio di Induzione si basa il cosìdetto Metodo di Prova per Induzione. Supponiamo che, dato un intero n_0, per ogni intero $n \geqslant n_0$, si possa formulare una proposizione $\mathbf{P}(n)$ (ad esempio, sia $n_0 = 1$, e sia $\mathbf{P}(n)$:= "se un insieme finito S ha n elementi, allora il suo insieme delle parti $\mathcal{B}(S)$ ha 2^n elementi"; oppure $\mathbf{P}(n)$:= "vale la seguente identità $1+2+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$"). Allora *il Metodo di Prova per Induzione* per la validità della proposizione $\mathbf{P}(n)$ consiste nel mostrare che:

(a) $\mathbf{P}(n_0)$ *è vera* (**Base dell'Induzione**);

(b) *per un qualsiasi intero* $k \geqslant n_0$*, si ha che:*
$\mathbf{P}(k)$ *è vera* $\Rightarrow$ $\mathbf{P}(k+1)$ *è vera* (**Passo Induttivo**).

Ciò permette di concludere che la proposizione $\mathbf{P}(n)$ è vera per un qualunque $n \in \mathbb{N}(n_0)$. Infatti, la validità di tale metodo di prova è subito dimostrata, utilizzando il Principio di Induzione **(I)**, prendendo $U := \{k \in \mathbb{N} \ : \ \mathbf{P}(k)$ è vera $\}$.

Teorema 1.2. *I seguenti enunciati sono tra loro equivalenti:*

(I) ***Il Principio di Induzione.***

($\mathbf{I_A}$) ***Il Principio di "Ampia" Induzione*** *(o Formulazione "debole" del Principio di Induzione): Siano* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *e* $V \subseteq \mathbb{Z}$ *tali che:*

$$\textbf{(a)}\ n_0 \in V\,, \quad \textbf{(b}_\mathbf{A}\textbf{)}\ \{x \in \mathbb{Z}\ :\ n_0 \leqslant x \leqslant k\} \subseteq V \ \Rightarrow\ k+1 \in V\,,$$

allora $V = \mathbb{N}(n_0)$.

(BO) ***Il Principio del Buon Ordinamento*** *(o* ***Principio del Minimo****): Sia* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *allora ogni sottoinsieme non vuoto* T *di* $\mathbb{N}(n_0)$ *ha* un primo elemento *o* minimo*, cioè un elemento* $t \in T$ *tale che* $t \leqslant z$*, per ogni altro elemento* $z \in T$*.*

Dimostrazione. **(I)** $\Rightarrow$ **($\mathbf{I_A}$)** Vogliamo dimostrare che se valgono **(a)** e **($\mathbf{b_A}$)** allora $V = \mathbb{N}(n_0)$. Sia $U := \{h \in \mathbb{Z} : \{n_0 \leqslant x \leqslant h\} \subseteq V\}$. Ovviamente, $n_0 \in U$, inoltre se $k \in U$ anche $k+1 \in U$ (per come è stato definito U a partire da V), dunque, applicando il principio **(I)** ad U, abbiamo $U = \mathbb{N}(n_0)$ e quindi, in particolare, $V = \mathbb{N}(n_0)$ (notare che $U \subseteq V \subseteq \mathbb{N}(n_0)$).

($\mathbf{I_A}$) $\Rightarrow$ **(BO)**. Supponiamo, per assurdo, che esista un sottoinsieme non vuoto T di $\mathbb{N}(n_0)$ che non possieda un primo elemento (dunque, in particolare, T possiede necessariamente più di un elemento). Sia

$$V := \{x \in \mathbb{N}(n_0)\ :\ x \leqslant t\,, \ \text{ per ogni } t \in T\}.$$

Ovviamente, $n_0 \in V$, dunque $V \neq \emptyset$, ed inoltre $V \neq \mathbb{N}(n_0)$ (perché, se $t_1, t_2 \in T$ e se, ad esempio, $t_1 < t_2$ allora $t_2 \notin V$). Allora, per **($\mathbf{I_A}$)**, deve esistere un elemento k tale che $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ n_0 \leqslant x \leqslant k\} \subseteq V$, ma $k+1 \notin V$. Osserviamo che un tale elemento k deve appartenere ad T (altrimenti, se fosse $k \notin T$, poiché $k \in V$, si avrebbe che $k < t$ e, dunque, che $k+1 \leqslant t$, per ogni $t \in T$, cioè si avrebbe che $k+1 \in V$). Dunque tale elemento k, che appartiene tanto a V quanto a T, risulta essere un primo elemento di T e ciò contraddice l'assunto.

(BO) $\Rightarrow$ **(I)**. Supponiamo, per assurdo, che esista un sottoinsieme proprio U di $\mathbb{N}(n_0)$ tale che $n_0 \in U$ ed inoltre soddisfacente alla condizione **(b)**. Sia $T := \mathbb{N}(n_0) \setminus U$. L'insieme T è non vuoto (perché abbiamo supposto che

$U \subsetneq \mathbb{N}(n_0)$), allora per **(BO)**, deve esistere un primo elemento t in T. Ovviamente $n_0 < t$, perché $n_0 \in U$. Quindi l'insieme non vuoto degli elementi di $\mathbb{N}(n_0)$ che precedono t, deve essere contenuto in U, in particolare $t - 1 \in U$. Quindi, per la proprietà **(b)**, dobbiamo avere che $(t-1)+1 = t \in U$ e ciò contraddice l'assunto. $\square$

1. Esercizi e Complementi

1.1. Mostrare che:

(a) Se $n \in \mathbb{N}$, allora:

$$n < 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = 0\,.$$

(b) Se $n, m \in \mathbb{Z}$, allora:

$$n < m \quad \Leftrightarrow \quad n + 1 \leqslant m\,.$$

[Suggerimento. **(a)** Supponiamo, per assurdo, che esista un $x \in \mathbb{N}$, tale che $0 < x < 1$. Allora, moltiplicando per $x\,(> 0)$, abbiamo che $0 < x^2 < x < 1$. Quindi, iterando il procedimento, per ogni $n \geqslant 1$, avremmo:

$$0 < \ldots\ldots < x^n < x^{n-1} < \ldots x^2 < x < 1\,.$$

Dunque, il sottoinsieme $S := \{x^n \ : n \geqslant 1\}\,(\subset \mathbb{N})$ non possiede un primo elemento. Ciò contraddice il Principio del Buon Ordinamento **(BO)**.
(b, $\Rightarrow$) Se $n < m$, allora $m - n > 0$. Se, per assurdo, $n + 1 \nleqslant m$, allora $m < n + 1$, quindi $0 < m - n < 1$. Ciò contraddice il precedente punto (a).
(b, $\Leftarrow$) è banale.]

1.2. (Proprietà archimedea dell'insieme $\mathbb{Z}$, Archimede (III Sec. A.C.) **)**
Mostrare che: *Presi comunque $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, allora esiste sempre un intero $n \in \mathbb{Z}$ in modo tale che:*

$$a < nb\,.$$

[Suggerimento. Se, per assurdo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha che $a \geqslant nb$, allora il sottoinsieme $S := \{a - nb \ : n \in \mathbb{Z}\}$ di $\mathbb{N}$ deve possedere un primo elemento $s_0 := a - n_0 b$ (Principio del Buon Ordinamento **(BO)**). Sia $s := a - (n_0 + 1)b \in S$. Allora, $s = s_0 - b$ (con $b > 0$ per ipotesi), quindi $s < s_0$. Ciò condraddice la proprietà di minimalità di s_0.]

1.3. . Siano $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$. Dimostrare le seguenti:

(a) *Proprietà di compatibilità della somma rispetto alla relazione di ordine:*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x + z < y + z\,;$$

(b) *Proprietà di compatibilità del prodotto rispetto alla relazione di ordine:*

$$\begin{array}{lll} x < y\,,\ \ z > 0 & \Rightarrow & xz < yz\,; \\ x < y\,,\ \ z < 0 & \Rightarrow & xz > yz\,. \end{array}$$

(c) Legge di cancellazione in $\mathbb{Z}$:

$$xz = yz\,,\ \ z \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y\,.$$

[Suggerimento. Le proprietà **(a)** e **(b)** discendono immediatamente dalla definizione della relazione "$<$" in $\mathbb{Z}$ (e, dunque, dalla definizione di "$<$" in $\mathbb{N}$).
(c, $\Leftarrow$) è banale (qualunque sia $z \in \mathbb{Z}$). **(c, $\Rightarrow$)** segue facilmente (ragionando per assurdo) da (b).]

1.4. Metodo di Prova per Induzione (II forma). Mostrare la validità del seguente enunciato:
Supponiamo che, dato un intero $n_0 \in \mathbb{Z}$, per ogni intero $n \geqslant n_0$, si possa formulare una proposizione $\mathbf{P}(n)$. Se:

(a) $\mathbf{P}(n_0)$ *è vera* (**Base dell'Induzione**);

(b) *per un qualsiasi intero h, con $n_0 \leqslant h \leqslant k$, si ha che:*
$\mathbf{P}(h)$ *è vera* $\Rightarrow$ $\mathbf{P}(k+1)$ *è vera* (**Passo Induttivo**);

allora la proposizione $\mathbf{P}(n)$ è vera per un qualunque $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant n_0$.
[Suggerimento. Basta applicare la formulazione $(\mathbf{I_A})$ del Principio di Induzione all'insieme $V := \{n \in \mathbb{Z} \ : n \geqslant n_0\,,\ \mathbf{P}(n) \text{ è vera }\}$.]

1.5. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che per ogni $n \geqslant 1$ si ha:
(a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,.$
(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\,.$
(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\,.$
[Suggerimento. È immediato che le formule precedenti sono verificate per $n = 1$ *(Base dell'Induzione)*. Procediamo, ora, nel dimostrare il *Passo Induttivo*.
(a) Se $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, allora $1+2+3+\ldots+k+k+1 = \frac{k(k+1)}{2}+k+1 = (k+1)(\frac{k}{2}+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
(b) Se $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k$, allora $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k+(k+1)^2 = \frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k+k^2+2k+1 = \frac{1}{3}(k+1)^3+\frac{1}{2}(k+1)^2+\frac{1}{6}(k+1)$.
(c) Se $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3 = (\frac{k(k+1)}{2})^2$, allora $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = (\frac{k(k+1)}{2})^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2[(\frac{k}{2})^2 + (k+1)] = (\frac{(k+1)(k+2)}{2})^2$.]

1.6. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che per ogni $n \geqslant 1$ si ha:
(a) $2n \geqslant n+1$.
(b) $2^n \geqslant 2n$.
[Suggerimento. È immediato che le disuguaglianze precedenti sono verificate per $n = 1$ *(Base dell'Induzione)*. Procediamo, ora, nel dimostrare il *Passo Induttivo*.
(a) Se $2k \geqslant k+1$, allora $2(k+1) = 2k+2 \geqslant k+1+2 > (k+1)+1$.
(b) Se $2^k \geqslant 2k$, allora $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqslant 2 \cdot 2k \geqslant 2(k+1)$.]

1.7. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che per ogni $n \geqslant 0$ e per ogni elemento $x \neq 1$ (ad esempio, $x \in \mathbb{R}$) si ha:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + \frac{x^n}{(1-x)}\,.$$

[Suggerimento. È immediato che la formula precedente è verificata per $n = 0$ *(Base dell'Induzione)* e per $n = 1$:

$$(1-x)^{-1} = 1 + \frac{x}{(1-x)}\,.$$

Passo induttivo: Se

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + \frac{x^k}{(1-x)},$$

allora:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1} = 1 + \tfrac{x}{(1-x)} \quad &= 1 + x \cdot (1-x)^{-1} = \\ &= 1 + x \cdot [1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + \tfrac{x^k}{(1-x)}] = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + \tfrac{x^{k+1}}{(1-x)} \,.\,]\end{aligned}$$

1.8. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che:

(a) Per ogni $n \geqslant 1$ e per ogni x, ad esempio $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$(x^n - 1) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)\,.$$

(b) (Progressione Aritmetica) Per ogni $n \geqslant 0$ e presi comunque x, y, ad esempio $x, y \in \mathbb{R}$, si ha:

$$x + (x+y) + (x+2y) + (x+3y) + \ldots + (x + (n-1)y) + (x+ny) = \frac{(n+1)(2x+ny)}{2}\,.$$

(c) (Progressione Geometrica) Per ogni $n \geqslant 0$ e presi comunque x e $y \neq 1$, ad esempio $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq 1$, si ha:

$$x + xy + xy^2 + xy^3 + \ldots + xy^{n-1} + xy^n = \frac{x(y^{n+1}-1)}{(y-1)}\,.$$

(d) Presi comunque due interi $m \geqslant 0$ ed $n \geqslant m$ e presi comunque x e $y \neq 1$, ad esempio $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq 1$, si ha:

$$xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{n-1} + xy^n = \frac{x(y^{n+1} - y^m)}{(y-1)}\,.$$

[Suggerimento. **(a)** Se $n = 1$ e se $n = 2$ l'uguaglianza è banalmente verificata (in particolare, per $n = 2$ vale che $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$). Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione (II forma), per $n \geq 3$, si ha:

$$\begin{aligned}(x^n - 1) &= (x+1)(x^{n-1} - 1) - x(x^{n-2} - 1) = \\ &= (x+1)(x-1)(x^{n-2} + \ldots + x + 1) - x(x-1)(x^{n-3} + \ldots + x + 1) = \\ &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)\,.\end{aligned}$$

La stessa uguaglianza si può dimostrare utilizzando il Metodo di Prova per Induzione (I forma). In tal caso, la dimostrazione del Passo Induttivo procede come segue, per $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}(x^n - 1) &= (x^n - x + x - 1) = (x(x^{n-1} - 1) + x - 1) = \\ &= (x(x-1)(x^{n-2} + \ldots + x + 1) + x - 1) = \\ &= (x-1)[x(x^{n-2} + \ldots + x + 1) + 1] = \\ &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)\,.\end{aligned}$$

(b) Se $n = 0$ l'uguaglianza è banalmente verificata. Per $n \geq 1$, si ha:

$$[x \ +(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+\ldots+(x+(n-1)y)]+(x+ny) =$$

$$= \tfrac{n(2x+(n-1)y)}{2} + (x+ny) = \tfrac{n(2x+(n-1)y)+(2x+2ny)}{2}$$

$$= \tfrac{(n+1)(2x+ny)}{2} \,.$$

La dimostrazione di **(c)** è analoga a quella di **(b)**.
(d) è conseguenza diretta di **(c)** dal momento che:

$$\begin{aligned} xy^m \ &+xy^{m+1}+xy^{m+2}+\ldots+xy^{n-1}+xy^n = \\ &= (x+xy++\ldots+xy^{n-1}+xy^n)-(x+xy+\ldots+xy^{m-2}+xy^{m-1})\,. \ ] \end{aligned}$$

1.9. (Disuguaglianza di Jakob Bernoulli (1654-1705)**)** Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che, per ogni $n \geqslant 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx\,.$$

[Suggerimento. Se $n = 0$ la disuguaglianza è banalmente verificata. Per $n \geq 1$, si ha:

$$\begin{aligned} (1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x) \quad &\geqslant (1+(n-1)x)(1+x) = 1+nx+(n-1)x^2 \geqslant \\ &\geqslant 1+nx\,. \ ] \end{aligned}$$

1.10. (Principio di G.P. Lejeune Dirichlet (1805-1859) detto anche **Principio delle "gabbie dei piccioni"** ovvero **Principio delle "caselle postali")**

Siano $n > m \geqslant 1$. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che: *Se un insieme finito con* n *elementi* [lettere] *deve essere ripartito in* m *sottoinsieni* [caselle postali], *allora almeno un sottoinsieme* [casella postale] *deve contenere più di un elemento* [lettera].
[Suggerimento. Se $n \geqslant 2$, allora $m = 1$. In tal caso il Principio enunciato è ovvio. Supponiamo $n \geqslant 3$. Sia $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e sia $\mathcal{F} := \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ una famiglia di m sottoinsiemi di A, con $m < n$, $\cup_{1 \leq i \leq m} A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$. Supponiamo per semplicità di notazione che $a_1 \in A_1$ (altrimenti, modifichiamo gli indici degli insiemi della famiglia $\mathcal{F}$) e che $A_1 = \{a_1\}$ (altrimenti abbiamo concluso). Poniamo $A' := A \setminus \{a_1\}$ e $\mathcal{F}' := \{A_2, \ldots, A_m\}$. Applicando l'ipotesi induttiva ad A' ed $\mathcal{F}'$ concludiamo facilmente.]