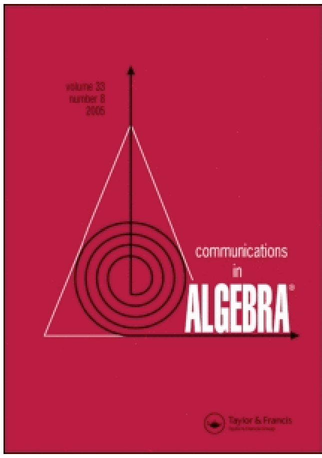

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713597239

Sur une classe d'anneaux de prüfer avec groupe de classes de torsion

Marco Fontana [a]; Nicolae Popescu [b]
[a] Dipartimento di Matematica, Terza Universita degli Studi di Roma, Roma, Italia
[b] Institut de Mathematiques Academie de Rouman, Bucarest, Roumanie

Online Publication Date: 01 January 1995

To cite this Article: Fontana, Marco and Popescu, Nicolae (1995) 'Sur une classe d'anneaux de prüfer avec groupe de classes de torsion', Communications in Algebra, 23:12, 4521 — 4533

To link to this article: DOI: 10.1080/00927879508825483
URL: http://dx.doi.org/10.1080/00927879508825483

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 23(12), 4521-4533 (1995)

SUR UNE CLASSE D'ANNEAUX DE PRÜFER AVEC GROUPE DE CLASSES DE TORSION

MARCO FONTANA(*)
Dipartimento di Matematica
Terza Università degli Studi di Roma
00146 Roma (Italia)

NICOLAE POPESCU(**)
Institut de Mathématiques
Académie de Roumanie
70700 Bucarest (Roumanie)

0. Introduction et rappels

Tous les anneaux considérés dans le présent papier sont commutatifs, unitaires et intègres. Un *suranneau* d'un anneau A est un anneau qui contient A comme sous-anneau et qui est contenu dans le corps de fractions de A.

Nous rappelons qu'un *système localisant* (ou *système topologisant de Gabriel*) $\mathcal{F}$ d'un anneau A est une famille d'idéaux de A telle que:

(SL1) $I \in \mathcal{F}$, J idéal de A, $I \subseteq J \Rightarrow J \in \mathcal{F}$;

(SL2) $I \in \mathcal{F}$, J idéal de A, $(J :_A iA) \in \mathcal{F}$ pour tout $i \in I \Rightarrow J \in \mathcal{F}$.

Tous les systèmes localisants considérés dans ce papier ne sont pas banals, c.-à-d. ils vérifient aussi la propriété suivante:

(SL0) $$(0) \notin \mathcal{F} \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{F}.$$

(*) Travail effectué dans le cadre d'une NATO Collaborative Research Grant N. 900113.
(**) Travail effectué avec le support du Programme pour les Professeurs Visiteurs de la Terza Università degli Studi di Roma.

Si K est le corps de fractions de A et $\mathcal{F}$ est un système localisant de A, alors il n'est pas difficile de vérifier que

$$A_{\mathcal{F}} := \{x \in K : (A :_A xA) \in \mathcal{F}\}$$

est un suranneau de A, dit *anneau des fractions de A par rapport au système localisant $\mathcal{F}$*. On voit, aussitôt, que

$$A_{\mathcal{F}} = \cup\{(A :_K I) : I \in \mathcal{F}\} .$$

Une des motivations initiales pour l'étude de la notion de système localisant a été celle d'étendre les techniques de la localisation dans le contexte de l'algèbre non–commutative. Successivement P.J. Cahen [C] s'est intéressé à quelques questions intéressantes, concernant les systèmes localisants, dans le contexte des anneaux commutatifs.

Il est bien connu que, pour tout idéal premier P d'un anneau A,

$$\mathcal{F}_P := \{I : I \text{ idéal de } A \text{ tel que } I \not\subseteq P\}$$

est un système localisant de A et $A_{\mathcal{F}_P} = A_P$. Du fait que l'intersection d'une famille de systèmes localisants est encore un système localisant, alors à tout sous–ensemble non vide Y de $X := \mathrm{Spec}(A)$ on peut associer un système localisant

$$\mathcal{F}(Y) := \cap\{\mathcal{F}_P : P \in Y\} .$$

Il est facile de voir que, si $Y^{\downarrow}$ est la clôture de Y par générisations (c.–à–d. $Y^{\downarrow} := \{P \in X : \text{il existe } Q \in Y \text{ tel quel } P \subseteq Q\}$), alors $\mathcal{F}(Y^{\downarrow}) = \mathcal{F}(Y)$. Donc la famille des sous–ensembles Z de X, stables par générisations, paramétrise l'ensemble des systèmes localisants de A du type $\mathcal{F}(Y)$, appelés *systèmes localisants premiers*. Nous dirons qu'un *système localisant $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y)$ premier est Y-irrédondant*, ou que Y est *irrédondant pour la représentation* $\mathcal{F} = \cap\{\mathcal{F}_P : P \in Y\}$, si pour tout $\overline{P} \in Y$, on a $\cap\{\mathcal{F}_P : P \in Y \setminus \{\overline{P}\}\} \supset \mathcal{F}$.

Il est bien connu que, dans le cas d'un anneau noethérien A, tout système localisant $\mathcal{F}$ est premier et, précisément, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y)$ où $Y := \{P \in \mathrm{Spec}(A) : P \notin \mathcal{F}\}$ ([NP, Corollary 2.2] ou [St, Ch. 6, Corollary 6.5]; cf. aussi le Lemme 1.1). Mais, même dans le cas des anneaux de valuation, on peut donner des exemples de systèmes localisants qui ne sont pas premiers [FP, Exemple 1.5], [BB, Exemple 3.1].

Dans le cas des anneaux commutatifs non noethériens, quelques conditions de finitudes sur les systèmes localisants ont été introduites, afin d'obtenir d'intéressantes généralisations des résultats prouvés dans le cadre noethérien.

Un *système localisant* $\mathcal{F}$ est dit *de type fini* (respectivement, *principal*), si, pour tout $I \in \mathcal{F}$, il existe un idéal $J \in \mathcal{F}$, tel que $J \subseteq I$ et J est de type fini (respectivement, principal).

Les systèmes localisants premiers ont été caractérisés dans [P2, Théorème 1.1], [St, Ch. 6, Proposition 6.13] et [BO, Theorem 1.1] de la façon suivante:

THÉORÈME 0.1. *Soit A un anneau intègre et $\mathcal{F}$ un système localisant de A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mathcal{F}$ est un système localisant premier;

(ii) Si I est un idéal de A et si $I \notin \mathcal{F}$, alors il existe un idéal premier P de A, $I \subseteq P$, avec $P \notin \mathcal{F}$;

(iii) $\mathcal{F}$ est une intersection de systèmes localisants de type fini;

(iv) $\mathcal{F}$ est une intersection de systèmes localisants principaux. □

Dans le présent papier, nous nous proposons d'approfondir l'étude des *anneaux de Dedekind généralisés*, c.-à-d. les anneaux de Prüfer tels que tout système localisant est de type fini (cf. [P3], [PP] et [FP]) et de donner quelques caractérisations des anneaux de Prüfer dont tout système localisant est principal.

L'intérêt pour cette classe d'anneaux de Prüfer est lié à un problème posé par Gilmer-Ohm [GO] (cf. aussi [Pe]) sur la torsion du groupe des classes. Nous rappelons que F. Richman [R] a prouvé qu'un anneau A est de Prüfer si et seulement si tout suranneau de A est A-plat. Du fait qu'un suranneau plat est obtenu par une intersection de localisations, E. Davis [D] a noté qu'un anneau de Prüfer est un *QQR-anneau* (c.-à-d. tout suranneau est une intersection d'anneaux de fractions) et il a soulevé la question de la validité de la réciproque. Gilmer et Heinzer [GH] ont donné un exemple d'un QQR-anneau qui n'est pas un anneau de Prüfer, bien que, dans le cas des anneaux localement de dimension finie [D, Corollary 2] ou dans le cas des anneaux intégralement clos [GH, Corollary 1.7], les notions de QQR-anneau et anneau de Prüfer coincident. De la caractérisation de Richman, il s'ensuit que tout *QR-anneau* (c.-à-d. un anneau dont tous les suranneaux sont anneaux de fractions [GO], [D]) est un anneau de Prüfer.

Un anneau de Prüfer n'est pas nécessairement un QR-anneau, car si A est noethérien, alors A est un QR-anneau si et seulement si A est de Dedekind et son groupe de classes est de torsion [D, Theorem 2], [GO, Corollary 2.6], [Go, Corollary 1, p. 114]. Une caractérisation utile des QR-anneaux est la suivante: un anneau est un QR-anneau si et seulement si tout idéal radical d'un idéal de type fini est le radical d'un idéal principal [GO, Corollary 2.4] et [Pe, Theorem 5]. Donc, tout anneau de Bézout est un QR-anneau.

Le problème, posé dans [GO], si un QR-anneau doit avoir nécessairement le groupe de classes (c.-à-d. le groupe quotient du groupe de idéaux fractionnaires non zéro de type fini modulo le sous-groupe des idéaux principaux non zéro) de torsion a été résolu par la négative par Heinzer [H, Section 1]. Comme conséquence d'un des résultats principaux de ce papier nous obtiendrons que, dans le cas des anneaux de Dedekind généralisés, un anneau est un QR-anneau si et seulement si son groupe de classes est de torsion. Nous verrons aussi que ces anneaux sont étroitement liés aux *CP-anneaux* (c.-à-d. les anneaux tels que si un idéal I est contenu dans la réunion d'une famille d'idéaux premiers alors I est contenu dans un des idéaux de famille [RV], [S], [P2], [PS]).

1. Anneaux dont tout système localisant est principal

Nous nous proposons, tout d'abord, d'approfondir la relation entre les deux propriétés suivantes:

(a) tout système localisant d'un anneau A est de type fini;

(b) tout système localisant d'un anneau A est univoquement représentable comme une intersection irrédondante du type suivant:

$$\mathcal{F} = \cap\{\mathcal{F}_P : P \in \Phi\} \quad \text{où} \quad \Phi := \{M \cap A : M \in \operatorname{Max}(A_{\mathcal{F}})\} .$$

Nous savons que, dans le cas d'un anneau de Prüfer, les propriétés (a) et (b) sont équivalentes entre elles et caractérisent les anneaux de Dedekind généralisés [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v)].

Nous rappelons qu'un *système localisant* $\mathcal{F}$ d'un anneau A est dit *parfait* si $IA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$ pour tout $I \in \mathcal{F}$.

LEMME 1.1. *Soit $\mathcal{F}$ un système localisant non banal de type fini d'un anneau intègre A. Alors:*

(a) Pour tout idéal I de A, $I \notin \mathcal{F}$, il existe un idéal $Q \supseteq I$ tel que $Q \notin \mathcal{F}$, lequel est maximal avec cette propriété. En outre, Q est un idéal premier de A.

(b) Si $Y_{\mathcal{F}} := \{P \in \operatorname{Spec}(A) : P \notin \mathcal{F}$ et P est maximal avec cette propriété$\}$ alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y_{\mathcal{F}}) = \cap\{\mathcal{F}_P : P \in Y_{\mathcal{F}}\}$ est $Y_{\mathcal{F}}$-irrédondante.

(c) $\mathcal{F}$ est un système localisant parfait si et seulement si l'application $Y_{\mathcal{F}} \to \operatorname{Max}(A_{\mathcal{F}})$, $P \mapsto PA_{\mathcal{F}}$ est bijective (donc, dans cette situation, $Y_{\mathcal{F}}$ coincide avec $\Phi = \{M \cap A\colon M \in \operatorname{Max}(A_{\mathcal{F}})\}$).

Démonstration.

(a) Si $\{I_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ est une chaîne d'idéaux de A tels que $I_\gamma \notin \mathcal{F}$, alors $I := \cup\{I_\gamma\colon \gamma \in \Gamma\} \notin \mathcal{F}$ (car autrement on pourrait trouver un idéal de type fini $J \in \mathcal{F}$ tel que $J \subseteq I$ et donc $J \subseteq I_\gamma$ pour un quelque $\gamma \in \Gamma$: une contradiction). Donc, on peut appliquer le Lemme de Zorn à l'ensemble $\mathcal{I} := \{I : I$ idéal de $A, I \notin \mathcal{F}\}$ et on peut affirmer que cet ensemble possède des éléments maximaux. Soit Q un élément maximal dans $\mathcal{I}$ et soient $x, y \in A$ avec $x \notin Q$ et $y \notin Q$. Alors $Q + xA$, $Q + yA \in \mathcal{F}$ et donc on peut trouver des idéaux de type fini $I', I'' \in \mathcal{F}$ avec $I' \subseteq Q + xA$ et $I'' \subseteq Q + yA$, d'où $I'I'' \subseteq Q + xyA$. Il s'ensuit que $Q + xyA \in \mathcal{F}$, donc $xy \notin Q$.

(b) Si $P \notin \mathcal{F}$, alors il est clair que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_P$. Donc il est évident que $\mathcal{F} \subseteq \cap\{\mathcal{F}_P\colon P \in Y_{\mathcal{F}}\} = \mathcal{F}(Y_{\mathcal{F}})$. Si $I \in \mathcal{F}(Y_{\mathcal{F}})$, alors $I \not\subseteq P$ pour tout $P \in Y_{\mathcal{F}}$. Si, par l'absurde, $I \notin \mathcal{F}$, alors on peut trouver par (a), un idéal $Q \in Y_{\mathcal{F}}$ avec $Q \supseteq I$. Il s'ensuit que $I \notin \mathcal{F}_Q$: une contradiction. Enfin, $\mathcal{F} = \cap\{\mathcal{F}_P : P \in Y_{\mathcal{F}}\}$ est irrédondante, car si $\overline{P} \in Y_{\mathcal{F}}$ et $Y := Y_{\mathcal{F}} \setminus \{\overline{P}\}$ alors $\overline{P} \in \mathcal{F}(Y)$, avec $\overline{P} \notin \mathcal{F}_{\overline{P}}$, d'où $\overline{P} \notin \mathcal{F}$.

(c) Supposons, d'abord, que $\mathcal{F}$ soit parfait. Alors, pour tout $Q \in \operatorname{Max}(A_{\mathcal{F}})$, posons $P := Q \cap A$. Il est facile de voir que $Q = PA_{\mathcal{F}}$; car si, par l'absurde, $x \in Q \setminus PA_{\mathcal{F}}$, alors $xI \subseteq A$ pour un quelque $I \in \mathcal{F}$, d'où $xI \in Q \cap A = P$: une contradiction. Du fait que $\mathcal{F}$ est parfait il découle que $P \notin \mathcal{F}$ et donc $P \in Y_{\mathcal{F}}$.

Supposons, maintenant, que $Y_{\mathcal{F}} \to \text{Max}(A_{\mathcal{F}})$, $P \to PA_{\mathcal{F}}$, soit bijective. Soit $I \in \mathcal{F}$. Supposons par l'absurde que $IA_{\mathcal{F}} \neq A_{\mathcal{F}}$, donc $IA_{\mathcal{F}} \subseteq Q$ avec $Q \in \text{Max}(A_{\mathcal{F}})$. Par hypothèse, $Q = PA_{\mathcal{F}}$ avec $P \in Y_{\mathcal{F}}$. Nous pouvons supposer que I est de type fini et, donc, $I = (x_1, x_2, \ldots, x_s)A$, d'où $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}\alpha_{ij}$ avec $1 \leq i \leq s$, $m_i \geq 1$, $p_{ij} \in P$, $\alpha_{ij} \in A_{\mathcal{F}}$. Si $J \in \mathcal{F}$ est tel que $\alpha_{ij}J \in A$ pour tout couple i, j, alors $IJ \subseteq P$: une contradiction, car $IJ \in \mathcal{F}$. ◫

COROLLAIRE 1.2. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux systèmes localisants de type fini d'un anneau A. Alors, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ si et seulement si $Y_{\mathcal{F}} = Y_{\mathcal{F}'}$.* ◫

Remarque 1.3. Dans le Lemme 1.1, l'hypothèse que $\mathcal{F}$ soit de type fini est essentielle. En effet, si (V, M) est un anneau de valuation tel que $M = \cup\{P \in \text{Spec}(V) : P \neq M\}$ et si $\mathcal{F} := \{M, V\}$ alors $\mathcal{F}$ est un système localisant de V qui n'est pas de type fini, $V_{\mathcal{F}} = V$ et $Y_{\mathcal{F}} = \phi$ [FP, Exemple 1.5].

PROPOSITION 1.4. *Soit A un anneau intègre et $\mathcal{F}$ un système localisant de A. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mathcal{F}$ est de type fini;

(ii) il existe un unique sous–espace quasi-compact $Y_{\mathcal{F}}$ de Spec(A) *tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y_{\mathcal{F}})$ est $Y_{\mathcal{F}}$-irrédondante;*

(iii) il existe un sous–espace quasi-compact Y de Spec(A) *tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y)$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $Y_{\mathcal{F}}$ comme dans le Lemme 1.1 (b), pour conclure il suffit de prouver que $Y_{\mathcal{F}}$ est un sous–espace quasi-compact de Spec(A). Soit $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ une famille d'idéaux de A telle que $Y_{\mathcal{F}} \subseteq \cup\{D(I_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, où $D(J) := \text{Spec}(A) \setminus V(J) = \{Q \in \text{Spec}(A) : Q \not\supseteq J\}$ pour tout idéal J de A. Posons $I := \cup\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Du fait que $D(I) = \cup\{D(I_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, nous déduisons que $I \in \mathcal{F}_P$, pour tout $P \in Y_{\mathcal{F}}$, d'où $I \in \mathcal{F}$. Par hypothèse $\mathcal{F}$ est de type fini, donc il existe un idéal J de type fini de A tel que $J \in \mathcal{F}$ et $J \subseteq I$. Donc $Y_{\mathcal{F}} \subseteq D(J) \subseteq D(I)$. Etant J de type fini, il s'ensuit que

$$J \subseteq I_{\lambda_1} + \cdots + I_{\lambda_s} \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Lambda$$

d'où $Y_{\mathcal{F}} \subseteq D(J) \subseteq D(I_{\lambda_1} + \cdots + I_{\lambda_s}) = \cup\{D(I_{\lambda_i} : 1 \leq i \leq s\}$ et, donc, $Y_{\mathcal{F}}$ est quasi–compact.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons, par l'absurde, que $I \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(Y)$ et que tout idéal $J \subseteq I$, $J \in \mathcal{F}$ ne soit pas de type fini. Alors $D(I) = \cup\{D(iA) : i \in A\} \supseteq Y$. De la quasi-compacité de Y, nous déduisons l'existence d'un sous–ensemble fini $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subset I$ tel que $\cup\{D(i_kA) : 1 \leq k \leq s\} \supseteq Y$, d'où une contradiction, car $J := i_1A + \cdots + i_sA \subseteq I$ et $D(J) \supseteq Y$, c.–à–d. $J \in \cap\{\mathcal{F}_P : P \in Y\} = \mathcal{F}$.

□

Remarque 1.5. (a) La démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) montre aussi que $X_{\mathcal{F}} := \{P \in \mathrm{Spec}(A) : P \notin \mathcal{F}\}$ est un sous–espace quasi-compact de Spec(A), avec $Y_{\mathcal{F}} \subseteq X_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}(X_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(Y_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$. La preuve du Lemme 1.1 (c) montre aussi que, si $\mathcal{F}$ est un système localisant de type fini non banal alors $\mathcal{F}$ est parfait si et seulement si $X_{\mathcal{F}} = \{Q \cap A : Q \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{F}})\}$. Donc, il est possible de donner des exemples pour lequels $Y_{\mathcal{F}}$ et $X_{\mathcal{F}}$ sont quasi–compacts avec $Y_{\mathcal{F}} \subset X_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(X_{\mathcal{F}})$.

(b) De [BO, Theorem 1.2], il s'ensuit que les conditions (i), (ii) et (iii) de la Proposition 1.4 sont équivalentes à

(iv) $\mathcal{F}$ est un système localisant tel que, pour toute chaîne d'idéaux $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dans A, si $\cup\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \in \mathcal{F}$ alors il existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tel que $I_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{F}$.

LEMME 1.6. *Soit $\mathcal{F}$ un système localisant de type fini d'un anneau intègre A. Alors, $I \in \mathcal{F}$ si et seulement si, pour tout $P \in \mathrm{Min}(I)$, $P \in \mathcal{F}$.*

Démonstration. Supposons que, pour tout $P \in \mathrm{Min}(I)$, $P \in \mathcal{F}$ et que, par l'absurde, $I \notin \mathcal{F}$. Alors, en appliquant le Lemme 1.1 (a), on peut trouver un idéal premier Q de A $I \subseteq Q$ et $Q \notin \mathcal{F}$, donc un quelque idéal premier minimal de I ne peut pas appartenir à $\mathcal{F}$: une contradiction. □

LEMME 1.7. *Soit A un anneau de Dedekind généralisé et soit $\{P_i : 1 \leq i \leq s\}$ une famille d'idéaux premiers de A, deux à deux comaximaux. Posons*

$$\mathcal{F}(P_1, P_2, \dots, P_s) := \{I : I \textit{ idéal de } A \textit{ el qu'il existe un idéal } I_* \textit{ de } A \\ \text{avec } I_* \subseteq I \text{ et } \mathrm{Min}(I_*) \subseteq \{P_i : 1 \leq i \leq s\}\}\ .$$

(a) $\mathcal{F}(P_1, P_2, \dots, P_s)$ est un système localisant;

(b) Si I_* est un idéal de type fini tel que $\mathrm{Min}(I_*) = \{P_i : 1 \leq i \leq s\}$, alors

$$\mathcal{F}(P_1, P_2, \dots, P_s) = \{I : I \textit{ idéal de } A \textit{ et } I \supseteq I_*^n \textit{ pour} \\ \textit{un quelque } n \geq 1\}\ .$$

Démonstration. (a) Pour tout idéal premier non zéro P d'un anneau de Dedekind généralisé, on sait que $P_0 := \bigcap_{n \geq 1} P^n \subset P$ est un idéal premier, adjacent à P. Soit $Y := Y(P_1, \dots, P_s) : = \{(P_1)_0, \dots, (P_s)_0 ; M_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, où $\{M_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ est l'ensemble de tous les idéaux maximaux de A, tels que $M_\gamma \not\supseteq P_i$ pour tout i. Soit $\mathcal{F} := \cap\{\mathcal{F}_Q : Q \in Y\} = \{I : I$ idéal de A, $I \not\subseteq Q$ pour tout $Q \in Y\}$.

Nous affirmons que $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_s) = \mathcal{F}$. Tout d'abord, il est facile de voir que $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_s) \subseteq \mathcal{F}$, et donc que $P_1, P_2, \dots, P_s \in \mathcal{F}$. Soit $I \in \mathcal{F}$. Considérons $I' := I \cap P_1 \cap \dots \cap P_s$, donc $I' \in \mathcal{F}$, d'où il existe un idéal de type fini $I'' \in \mathcal{F}$ avec $I'' \subseteq I'$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (iii)]. Nous voulons démontrer que tout idéal premier minimal P'' de I'' appartient à $\{P_1, \dots, P_s\}$. Si P'' est comaximal avec P_i, pour tout i, alors $P'' \subseteq M_\gamma$ pour quelque $\gamma \in \Gamma$ et donc $P'' \notin \mathcal{F}$: une contradiction. Du fait que $P'' \in \mathcal{F}$, alors $P'' \not\subseteq (P_i)_0$, pour tout i, d'où on déduit que $P'' = P_i$ pour un quelque i $(1 \leq i \leq s)$, donc $\mathrm{Min}(I'') \subseteq \{P_1, \dots, P_s\}$. Il s'ensuit que $I' \in \mathcal{F}(P_1, \dots, P_s)$, d'où $I \in \mathcal{F}(P_1, \dots, P_s)$.

(b) Posons $\mathcal{F}(I_*) := \{I : I$ idéal de A et $I \supseteq I_*^n$ pour un quelque $n \geq 1\}$. Montrons, tout d'abord, que $\mathcal{F}(I_*)$ est un système localisant.

Les conditions (**SL0**) et (**SL1**) sont trivialement vérifiées par $\mathcal{F}(I_*)$. Pour prouver (**SL2**), il suffit de montrer que, pour $n \geq 1$ fixé, si $(J :_A xA) \in \mathcal{F}(I_*)$ pour tout $x \in I_*^n$, alors $J \in \mathcal{F}(I_*)$. Du fait que I_* est de type fini, on peut trouver un entier $m \geq 1$ tel que $I_*^m \subseteq (J :_A xA)$ pour tout $x \in I_*^n$, donc $I_*^n I_*^m \subseteq J$, d'où $J \in \mathcal{F}(I_*)$.

Il est facile de voir que, pour tout i $(1 \leq i \leq s)$, $(P_i)_0 \notin \mathcal{F}(I_*)$ et que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $M_\gamma \notin \mathcal{F}(I_*)$, donc, compte tenu de (a),

$$\mathcal{F}(I_*) \subseteq (\cap\{\mathcal{F}_{(P_i)_0} : 1 \leq i \leq s\}) \cap (\cap\{\mathcal{F}_{M_\gamma} : \gamma \in \Gamma\}) = \mathcal{F} = \mathcal{F}(P_1, \ldots, P_s) .$$

Réciproquement, soit $I \in \mathcal{F}(P_1, \ldots, P_s)$; si $I \notin \mathcal{F}(I_*)$, alors on peut trouver un idéal premier Q, $I \subseteq Q$, avec $Q \notin \mathcal{F}(I_*)$ (Lemme 1.1 (a)). Du fait que $I \subseteq Q$, alors $Q \in \mathcal{F}(P_1, \ldots, P_s) = \mathcal{F}$ et donc $Q \not\subseteq (P_i)_0$, $Q \not\subseteq M_\gamma$ pour tout i, $1 \leq i \leq s$, et pour tout $\gamma \in \Gamma$. Il s'ensuit que $Q \supseteq P_i$, pour quelque i, donc $Q \supseteq I_*$: une contradiction. En conclusion, $\mathcal{F}(I_*) = \mathcal{F}(P_1, \ldots, P_s)$. ◻

Remarque 1.8. (a) Pour tout idéal non zéro J d'un anneau intègre A, on peut considérer le système localisant

$$\mathcal{F}(D(J)) := \cap\{\mathcal{F}_Q : Q \in D(J)\} ,$$

où $D(J) := \{Q \in \operatorname{Spec}(A) : Q \not\supseteq J\}$. Il est facile de voir que $\mathcal{F}(D(J)) = \{I : I$ idéal de A, $J \subseteq \operatorname{rad}(I)\}$. Si $J = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_s$ est une intersection irrédondante d'une famille finie $\{P_i : 1 \leq i \leq s\}$ d'idéaux premiers de A, alors on peut vérifier que $\mathcal{F}(D(J)) = \mathcal{F}(P_1, P_2, \ldots, P_s) := \{I : I$ idéal de A tel qu'il existe un idéal I_* de A avec $I_* \subseteq I$ et $\operatorname{Min}(I_*) \subseteq \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}\}$.

Si J est un idéal de type fini de A, alors du fait que $\mathcal{F}(D(J)) = \{I : J \subseteq \operatorname{rad}(I)\}$ il s'ensuit que $\mathcal{F}(D(J)) = \{I : I$ idéal of A tel que $I \supseteq J^n$ pour un quelque $n \geq 1\}$. Il est alors facile de voir que $A_{\mathcal{F}(D(J))}$ coincide avec le transformé de Nagata $T(J)$.

(b) Dans le cas d'un anneau de Dedekind généralisé A, pour tout idéal premier non zéro P de A, si I_* est un idéal de type fini de A tel que $\operatorname{rad}(I_*) = P$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (vi)] alors on a $\mathcal{F}(P) = \{I : I$ idéal de A, $\operatorname{rad}(I) = P\} = \{I : I$ idéal de A, $I \supseteq I_*^n$ pour un quelque $n \geq 1\}$.

Soit $\mathcal{F}$ un système localisant d'un anneau de Prüfer A. Soit $\mathcal{G}(A)$ le groupe des idéaux fractionnaires inversibles (= de type fini, non zero) de A. Posons

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) := \{G \in \mathcal{G}(A) : \text{ il existe un idéal de type fini } I \in \mathcal{F} \text{ tel que } IG \in \mathcal{F}\} .$$

LEMME 1.9. *Avec les notations introduites ci-dessus, si $\mathcal{F}$ est un système localisant d'un anneau de Prüfer A, alors:*

(a) $G \in \mathcal{G}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow G = IJ^{-1}$, avec I et J idéaux de type fini non zéro dans $\mathcal{F}$;

(b) $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}(A)$.

Démonstration. Immédiate. ◻

PROPOSITION 1.10. *Soit $\mathcal{F}$ un système localisant de type fini d'un anneau de Prüfer A. Alors:*

$$0 \to \mathcal{G}(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}(A) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}(A_{\mathcal{F}}) \to 0$$

est une suite exacte (où $\varphi(G) := GA_{\mathcal{F}}$ pour tout $G \in \mathcal{G}(A)$)).

Démonstration. Si $H \in \mathcal{G}(A_{\mathcal{F}})$ alors $H = x_1A_{\mathcal{F}} + \cdots + x_sA_{\mathcal{F}}$ avec $x_1, \ldots, x_s$ dans le corps des fractions de A. Si $G := x_1A + \cdots + x_sA$, alors $G \in \mathcal{G}(A)$ et $GA_{\mathcal{F}} = H$. Soit $G \in \mathcal{G}(A)$, alors $GA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$ si et seulement si $G \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$. En effet, si $GA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$ alors $G \subseteq A_{\mathcal{F}}$ et donc $(A : G) \in \mathcal{F}$. Il s'ensuit qu'il existe un idéal de type fini $J \in \mathcal{F}$ tel que $J \subseteq (A : G)$, donc $I := GJ$ est un idéal de type fini de A et $G = IJ^{-1}$. De plus $IA_{\mathcal{F}} = \varphi(I) = \varphi(GJ) = \varphi(G)\varphi(J) = GA_{\mathcal{F}}JA_{\mathcal{F}} = JA_{\mathcal{F}}$ et $JA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$, car $J \in \mathcal{F}$ donc $(A : J) \subseteq A_{\mathcal{F}}$, d'où $1 \in A = J(A : J) \subseteq JA_{\mathcal{F}}$. Du fait que $IA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$ il s'ensuit que $I \in \mathcal{F}$ [FP, Lemme 1.1].

Réciproquement, si $G \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ alors $G = IJ^{-1}$ avec $I, J \in \mathcal{F}$ de type fini non zéro, donc $GJ = I$ et $IA_{\mathcal{F}} = \varphi(I) = \varphi(GJ) = \varphi(G)\varphi(J) = GA_{\mathcal{F}}JA_{\mathcal{F}}$. Du fait que I, $J \in \mathcal{F}$ sont inversibles alors $IA_{\mathcal{F}} = JA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$, donc $GA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$.

□

LEMME 1.11. *Soit A un anneau de Dedekind généralisé qu n'est pas un corps.*

(a) Tout idéal maximal de A est de type fini;

(b) si $\mathcal{G}_1 := \mathcal{G}_1(A)$ dénote le sous-groupe libre de $\mathcal{G}(A)$ engendré par les idéaux maximaux de A, si $Y_1 := Y_1(A) := \{P_1 := \cap M^n : M \in \mathrm{Max}(A)\}$ et si $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}(Y_1)$ alors $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}(\mathcal{F}_1)$.

Démonstration.

(a) Pour tout $M \in \mathrm{Spec}(A)$, on sait qu'il existe un idéal de type fini J de A tel que $\mathrm{rad}(J) = M$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (vi)]. Si, de plus, M est maximal alors $JA_M = M^eA_M$, pour un quelque $e \geq 1$. Du fait que $J = \cap\{JA_M : M \in \mathrm{Max}(A)\} = M^eA_M \cap (\cap\{A_{M'} : M' \in \mathrm{Max}(A),\ M' \neq M\}) = M^eA_M \cap A = M^e$, alors M^e est inversible, donc M est inversible (= de type fini) dans A.

(b) Si $G \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_1)$, alors $G = IJ^{-1}$ avec I et J idéaux de type fini non zéro de $\mathcal{F}_1$. Considérons un idéal I de type fini de $\mathcal{F}_1$, $I \neq A$, alors $I \not\subseteq P_1$ pour tout $P_1 \in Y_1$, donc $\mathrm{Min}(I) = \{M_1, \ldots, M_s\}$ avec $M_i \in \mathrm{Max}(A)$ pour tout i, $1 \leq i \leq s$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (viii)].

Donc,

$$\begin{aligned} I = \cap\{IA_M : M \in \mathrm{Max}(A)\} &= (\cap\{IA_{M_i} : 1 \leq i \leq s\}) \cap \\ &\cap (\cap\{A_M : M \in \mathrm{Max}(A), M \neq M_i, 1 \leq i \leq s\}) = \\ &= \cap\{M_i^{e_i}A_{M_i} : 1 \leq i \leq s\} \cap A = \cap\{M_i^{e_i} : 1 \leq i \leq s\} = \\ &= M_1^{e_1}M_2^{e_2}\ldots M_s^{e_s}\ , \end{aligned}$$

où, par la partie (a), nous avons posé $IA_{M_i} = M_i^{e_i} A_{M_i}$, avec $e_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq s)$. En conclusion, si $G = IJ^{-1} \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_1)$ alors $G = M_1^{f_1} M_2^{f_2} \dots M_t^{f_t}$ avec $M_j \in \mathrm{Max}(A)$, $f_j \in \mathbf{Z}$ et $1 \leq j \leq t$.

Réciproquement, soit $G = M_1^{f_1} M_2^{f_2} \dots M_t^{f_t} \in \mathcal{G}_1(A)$ avec $f_i \in \mathbf{Z}$, $1 \leq i \leq t$. Pour tout $M \in \mathrm{Max}(A)$, on a $MA_{\mathcal{F}_1} = A_{\mathcal{F}_1}$, car $M \in \mathcal{F}_1$ et M est de type fini par la partie (a) (cf. aussi [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)]. Il s'ensuit que $GA_{\mathcal{F}_1} = A_{\mathcal{F}_1}$ et donc, par la Proposition 1.10, $G \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_1)$. ◫

THÉORÈME 1.12. *Soit A un anneau de Prüfer et soit K son corps de fractions. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) tout système localisant de A est principal;

(ii) A est un anneau de Dedekind généralisé et un QR–anneau;

(iii) tout suranneau B de A est un anneau de Dedekind généralisé et un QR–anneau;

(iv) A est un anneau de Prüfer discret fort et tout idéal premier de A est le radical d'un idéal principal de A;

(v) A est un anneau de Prüfer discret fort et un CP–anneau;

(vi) A est un anneau de Dedekind généralisé avec groupe des classes $\mathcal{C}(A) := \mathcal{G}(A)/K^*$ de torsion.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) En utilisant [FP, Théorème 2.7 (iii) $\Rightarrow$ (i)], il suffit de prouver que A est un QR–anneau. Soit B un suranneau de A et soit $\mathcal{F}$ le système localisant de A tel que $A_{\mathcal{F}} = B$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)]. Soit $S := \{x \in A : xA \in \mathcal{F}\}$ et soit $\mathcal{F}' := \mathcal{F}_S := \{I : I$ idéal de A tel quel $I \cap S \neq \phi\}$. Il est immédiat que $\mathcal{F}'$ est un système localisant de A et que $A_{\mathcal{F}'} = S^{-1}A$. Pour conclure il suffit de prouver que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. En utilisant le Lemme 1.1 et le Corollaire 1.2, il suffit de vérifier que $Y_{\mathcal{F}'} = Y_{\mathcal{F}}$. Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Soit $P \in Y_{\mathcal{F}}$. Si P est un idéal maximal de A du fait que $P \notin \mathcal{F}$, donc $P \notin \mathcal{F}'$, d'où $P \in Y_{\mathcal{F}'}$. Si P n'est pas maximal dans A, alors il existe un idéal premier Q de A tel que $P \subset Q$ et, donc, $Q \in \mathcal{F}$. Par hypothèse nous pouvons trouver $x \in A$ tel que $xA \subseteq Q$ et $xA \in \mathcal{F}$, donc $x \in S$ et $xA \in \mathcal{F}'$, d'où $Q \in \mathcal{F}'$. Du fait que $P \notin \mathcal{F}'$ il s'ensuit que $P \in Y_{\mathcal{F}'}$, donc $Y_{\mathcal{F}} \subseteq Y_{\mathcal{F}'}$. Réciproquement, soit $P \in Y_{\mathcal{F}'}$. Il est facile de voir que $P \notin \mathcal{F}$; car autrement il existerait $x \in A$ tel que $xA \subseteq P$ avec $xA \in \mathcal{F}$, d'où une contradiction. Si $P \subset Q$ avec $Q \notin \mathcal{F}$, alors $Q \notin \mathcal{F}'$ et donc P n'appartiendrait pas à $Y_{\mathcal{F}'}$. En conclusion $Y_{\mathcal{F}} = Y_{\mathcal{F}'}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est une banale conséquence de [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (x)] et du fait que la QR–propriété passe aux suranneaux.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Soit $P \in \mathrm{Spec}(A)$ et soit $\mathcal{F}(P)$ comme dans le Lemme 1.7 (cf. aussi Remarque 1.8 (b)). Par hypothèse $A_{\mathcal{F}(P)} = A_S = A_{\mathcal{F}_S}$ pour une quelque partie multiplicative S de A. En appliquant [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (iii)], on a $\mathcal{F}(P) = \mathcal{F}_S$, d'où $P \cap S \neq \phi$. Si $x \in P \cap S$ alors $xA \in \mathcal{F}_S = \mathcal{F}(P)$ et donc $\mathrm{rad}(xA) = P$ (Remarque 1.8 (b)).

(iv) $\Rightarrow$ (v) descend facilement de la définition de CP–anneau.

(v) $\Rightarrow$ (iv) est une conséquence immédiate du fait qu'un CP–anneau est caractérisé par la proprieté que tout idéal premier est le radical d'un idéal principal [S, Theorem].

(iv) $\Rightarrow$ (i). Sous la condition (iv), nous savons que A est un anneau de Dedekind généralisé [FP, Théorème 2.7 (vi) $\Rightarrow$ (i)]. Soit $\mathcal{F}$ un système localisant de A et $I \in \mathcal{F}$. Alors, $\text{Min}(I)$ est un ensemble fini, $\text{Min}(I) = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Rightarrow$ (viii)]. Soit $\mathcal{F}(P_1, P_2, \ldots, P_s)$ comme dans le Lemme 1.7. En appliquant le Lemme 1.6, il est facile de voir que $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_s) \subseteq \mathcal{F}$. Pour tout i $(1 \leq i \leq s)$ soit $x_i \in A$ tel que $x_i A \in \mathcal{F}$ et $\text{rad}(x_i A) = P_i$ et soit $x := x_1 x_2 \ldots x_s$, donc $\text{Min}(xA) = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$. Par le Lemme 1.7 (b), nous savons que $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_s) = \{J : J$ idéal de A et $J \supseteq x^n A$ pour un quelque $n \geq 1\}$. Du fait que $I \in \mathcal{F}(P_1, \ldots, P_s)$, alors $x^n A \subseteq I$ pour un quelque $n \geq 1$ et $x^n A \in \mathcal{F}$ (car $x_i A \in \mathcal{F}$ pour tout i).

(vi) $\Rightarrow$ (i) est une conséquence immédiate de [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (iii)].

(i) $\Rightarrow$ (vi). De [FP, Théorème 2.7 (iii) $\Rightarrow$ (i)], nous savons déjà que A est un anneau de Dedekind généralisé

1^{er} *Pas*. Avec les notations du Lemme 1.11, si tout système localisant est principal, alors $\mathcal{G}_1/(\mathcal{G}_1 \cap K^*)$ est un groupe de torsion.

Il suffit de montrer que, pour tout $M \in \text{Max}(A)$, il existe $n \geq 1$ tel que M^n est principal. Soit $\mathcal{F}(M)$ le système localisant de A introduit dans le Lemme 1.7, donc $\mathcal{F}(M) = \{I : I$ idéal de A tel que $\text{rad}(I) = M\}$. Par l'hypothèse, il existe $x \in A$ tel que $xA \subseteq M$, $xA \in \mathcal{F}(M)$, donc $\text{Min}(xA) = \{M\}$. De la démonstration du Lemme 1.11 (b), il s'ensuit qu'il existe $n \geq 1$ tel que $xA = M^n$, d'où l'affirmation du 1^{er} Pas.

Dans un anneau de Dedekind généralisé A, pour tout ordinal α, nous pouvons introduire l'ensemble des *idéaux premiers de A de coniveau α*, Y_α, de la façon suivante:

- $Y_0 := \text{Max}(A)$;
- si $Y_0 \neq \{(0)\}$, alors

$$Y_1 := \{P_1 := \cap M^n : M \in Y_0\} (\text{cf. Lemme 1.11 (b)});$$

  autrement si $Y_0 = \{(0)\}$ alors $Y_1 := \emptyset$;
- si α n'est pas un ordinal inaccessible et si $Y_{\alpha-1}$ n'est pas vide et $Y_{\alpha-1} \neq \{(0)\}$ alors

$$Y_\alpha := \{Q := \cap P^n : P \in Y_{\alpha-1}\};$$

  autrement $Y_\alpha := \emptyset$;
- si α est un ordinal inaccessible, alors on pose

$$W_\alpha := \cup\{Y_\beta : \beta < \alpha\},$$

  et

$$Y_\alpha := \{P \in \text{Spec}(A) : P \in \text{Spec}(A) \backslash W_\alpha \text{ et } P \text{ maximal avec cette propriété}\}.$$

Pour tout ordinal α tel que Y_α n'est pas vide, nous pouvons considérer le système localisant $\mathcal{F}_\alpha := \mathcal{F}(Y_\alpha) = \cap\{\mathcal{F}_P : P \in Y_\alpha\}$ et le groupe $\mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha)$. Il est clair que, si $\beta < \alpha$ et Y_α n'est pas vide, alors $\mathcal{G}(\mathcal{F}_\beta) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha)$.

$2^{ème}Pas$. Si A est un anneau de Dedekind généralisé, alors, $\mathcal{G}(A) = \cup_\alpha \mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha)$.

En effet, $\mathrm{Spec}(A) = \cup_\alpha Y_\alpha$, et $I \in \mathcal{F}_\alpha$ si et seulement si pour tout $P \in \mathrm{Min}(I)$, $P \in \mathcal{F}_\alpha$ (Lemme 1.6) c.-à-d. si et seulement si $P \in Y_\beta$ pour quelque $\beta < \alpha$. Donc, si $I \in \mathcal{G}(A)$ alors il existe α tel que $I \in \mathcal{F}_\alpha$, donc $IR_{\mathcal{F}_\alpha} = R_{\mathcal{F}_\alpha}$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)], d'où $I \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha)$.

$3^{ème}Pas$. Si A est un anneau de Dedekind généralisé, alors pour tout α tel que $Y_{\alpha+1}$ n'est pas vide, le groupe quotient $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\alpha+1})/\mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha)$ est un groupe abélien libre isomorphe à $\mathcal{G}_1(A_{\mathcal{F}_\alpha})$.

Nous considérons le diagramme commutatif exact du type suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\alpha+1}) \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{G}(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}(A) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{G}(A_{\mathcal{F}_\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{G}(A_{\mathcal{F}_{\alpha+1}}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{G}(A_{\mathcal{F}_{\alpha+1}}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{F}'$ est l'unique système localisant de $A_{\mathcal{F}_\alpha}$ tel que $(A_{\mathcal{F}_\alpha})_{\mathcal{F}'} = A_{\mathcal{F}_{\alpha+1}}$ (cf. [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (x) $\Leftrightarrow$ (iii)] et Proposition 1.10) et où φ'_α est la restriction de l'homomorphisme canonique φ_α à $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\alpha+1})$ (en effet, il est facile de vérifier que $\varphi_\alpha(\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\alpha+1})) = \mathcal{G}(\mathcal{F}')$). Nous savons que $\mathcal{F}' = \cap\{\mathcal{F}_Q : Q = M \cap A_{\mathcal{F}_\alpha}$ où $M \in \mathrm{Max}(A_{\mathcal{F}_{\alpha+1}})\}$ [FP, Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (x) $\Leftrightarrow$ (iv)] et donc $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(Y_{\mathcal{F}'})$ où $Y_{\mathcal{F}'} := \{P \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{F}_\alpha}) : P \notin \mathcal{F}'$ et P est maximal avec cette propriété$\} = \{P \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{F}_\alpha})$: P n'est pas maximal et, pour tout $Q \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{F}_\alpha})$ tel que $P \subset Q$, $Q \in \mathrm{Max}(A_{\mathcal{F}_\alpha})\}$. Il est facile de vérifier que $Y_{\mathcal{F}'}$ coincide avec $Y_1(A_{\mathcal{F}_\alpha}) := \{P := \cap M^n : M \in \mathrm{Max}(A_{\mathcal{F}_\alpha})\}$ et donc, par le Lemme 1.11 (b), $\mathcal{F}'$ coincide avec le système localisant $\mathcal{F}_1$ de l'anneau $A_{\mathcal{F}_\alpha}$ (c.-à- d. $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(Y_1(A_{\mathcal{F}_\alpha})))$ et donc $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\alpha+1})/\mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha) \cong \mathcal{G}(\mathcal{F}') = \mathcal{G}_1(A_{\mathcal{F}_\alpha})$ est un groupe libre.

$4^{ème}Pas$. Si A est un anneau de Dedekind généralisé alors, pour tout α tel que Y_α n'est pas vide,

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha)/(\mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha) \cap K^*)$$

est un groupe de torsion.

La démonstration peut être faite par récurrence transfinie. En effet, par le $1^{er}Pas$ et le Lemme 1.11 (b), $\mathcal{G}(\mathcal{F}_1)/(\mathcal{G}(\mathcal{F}_1) \cap K^*)$ est un groupe de torsion. Supposons par l'hypotèse de récurrence que, pour tout $1 \leq \beta < \alpha$, $\mathcal{G}(\mathcal{F}_\beta)/(\mathcal{G}(\mathcal{F}_\beta) \cap K^*)$ soit un groupe de torsion. Si $\mathcal{F}'$ est l'unique système localisant de $A_{\mathcal{F}_\beta}$ tel que $(A_{\mathcal{F}_\beta})_{\mathcal{F}'} = A_{\mathcal{F}_{\beta+1}}$, alors de la démonstration du $3^{\grave{e}me}Pas$ on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{G}(\mathcal{F}_\beta)}{\mathcal{G}(\mathcal{F}_\beta) \cap K^*} \longrightarrow \frac{\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\beta+1})}{\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\beta+1}) \cap K^*} \longrightarrow \frac{\mathcal{G}(\mathcal{F}')}{\mathcal{G}(\mathcal{F}') \cap K^*} \to 0.$$

Par le $1^{er}Pas$ appliqué à $\mathcal{G}_1(A_{\mathcal{F}_\beta}) = \mathcal{G}(\mathcal{F}')$ on a $\mathcal{G}(\mathcal{F}')/(\mathcal{G}(\mathcal{F}') \cap K^*)$ est de torsion, d'où on déduit que $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\beta+1})/(\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\beta+1}) \cap K^*)$ est aussi de torsion.

La conclusion est immédiate, car le groupe de classes de A coincide avec

$$\cup_\alpha \mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha)/(\mathcal{G}(\mathcal{F}_\alpha) \cap K^*)$$

($2^{\grave{e}me}Pas$).

BIBLIOGRAPHIE

[B] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative*, Ch. I–II, Hermann, 1961.

[BB] W. BRANDAL–E. BARBUT, "Localizations of torsion theories", *Pacific J. Math.*, **107** (1983), 27–37.

[BO] M. BEATTIE–M. ORZECH, "Prime ideals and finiteness conditions for Gabriel topologies over commutative rings", *Rocky Mount. J. Math.*, **22** (1992), 423–439.

[C] P.J. CAHEN, "Commutative torsion theory", *Trans. Am. Math. Soc.*, **184** (1973), 73–85.

[D] E.D. DAVIS, "Overrings of commutative rings, II: integrally closed overrings", *Trans. Am. Math. Soc.*, **110** (1964), 196–212.

[FP] M. FONTANA–N. POPESCU, "Sur une classe d'anneaux qui généralisent les anneaux de Dedekind", *J. Algebra*, (to appear).

[GH] R. GILMER–W. HEINZER, "Intersections of quotient rings of integral domains", *J. Math. Kyoto Univ.*, **7** (1967), 133–150.

[GO] R. GILMER–J. OHM, "Integral domains with quotient overrings", *Math. Ann.*, **153** (1964), 97–103.

[Go] O. GOLDMAN, "A special class of Dedekind domains", *Topology*, **3** (1964), 113–118.

[H] W. HEINZER, "Quotient overrings of integral domains", *Mathematika*, **17** (1970), 139–148.

[NP] C. NĂSTĂSESCU–N. POPESCU, "On the localization ring of a ring", *J. Algebra*, **15** (1970), 41–56.

[PS] J.V. PAKALA–T.S. SHORES, "On compactly packed rings", *Pacific J. Math.*, **97** (1981), 197–201.

[Pe] R.L. PENDLETON, "A characterization of Q-domains", *Bull. Am. Math. Soc.*, **72** (1966), 499–500.

[P1] N. POPESCU, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, 1973.

[P2] N. POPESCU, "Sur les C.P.-anneaux", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **A–272**, (1971), 1493–1496.

[P3] N. POPESCU, "A class of Prüfer domains", *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **29** (1984), 777–786.

[PP] E.L. POPESCU–N. POPESCU, "A characterization of generalized Dedekind domains", *Bull. Math. Roumanie*, **35** (1991), 139–141.

[RV] C. REIS–T. VISWANATHAN, "A compactness property of prime ideals in Noetherian rings", *Proc. Am. Math. Soc.*, **25** (1970), 353–356.

[R] F. RICHMAN, "Generalized quotient rings", *Proc. Am. Math. Soc.*, **16** (1965), 794–799.

[S] W. SMITH, "A covering condition for prime ideals", *Proc. Am. Math. Soc.*, **30** (1971), 451–452.

[St] B. STENSTRÖM, *Rings of Quotients*, Springer, 1975.

Received: December 1994

Revised: March 1995