Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Prima prova di valutazione intermedia
9 Novembre 2006

*Cognome*_________________ *Nome*_________________

*Numero di matricola*_________________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$. Dimostrare che

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B),$$

dove $\complement Y = X \setminus Y$, per ogni $Y \subseteq X$.

Esercizio 2. Sia X un insieme non vuoto e sia $Y = X^X$ l'insieme di tutte le funzioni $f : X \to X$. Si definisca in Y la seguente relazione:

$$f \rho g \iff f = g \quad \text{oppure} \quad \mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(g)$$

Verificare che tale relazione è una relazione d'ordine e determinare gli elementi massimali e minimali di Y.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

e la relazione di equivalenza nucleo ρ_f associata a f , definita da

$$(x, y)\, \rho_f\, (x', y') \iff f((x, y)) = f((x', y')),$$

a) Determinare l'immagine di f ;

b) Determinare la classe di equivalenza rispetto a ρ_f di ogni elemento di $\mathbb{R}^2$;

c) Descrivere l'insieme quoziente $\mathbb{R}^2/\rho_f$;

d) Definire esplicitamente la biiezione canonica $\mathbb{R}^2/\rho_f \leftrightarrow \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 4. Usando il Principio di Induzione, provare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ risulta

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

Esercizio 5.

a) Dare la definizione di massimo comun divisore fra due interi.

b) Con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, determinare il massimo comune divisore positivo tra 1053 e 455. Inoltre, determinare almeno due identità di Bezout per esso.