Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Appello A
18 Gennaio 2007

*Cognome*_________________ *Nome*_________________

*Numero di matricola*_________________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. In $\mathbb{Z}$ si definisca la relazione

$$a \,\rho\, b \Leftrightarrow \text{ esistono } h, k \geq 0 \text{ tali che } 2^h a = 2^k b.$$

(a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza.

(b) Verificare che l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\rho$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $D \cup \{0\}$, dove D denota l'insieme dei numeri dispari.

Esercizio 2. Usando il Principio di Induzione, provare che, per ogni numero naturale $n \geq 1$, risulta

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 6\binom{n+3}{4}.$$

Esercizio 3. Determinare quanti sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{221}$. Stabilire se le classi di 16 e 17 sono invertibili in $\mathbb{Z}_{221}$ e in caso affermativo determinare le loro classi inverse, illustrando il procedimento seguito.

Esercizio 4. Determinare la decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità delle seguenti permutazioni di S_9:

(a) $\sigma = (167) \circ (754) \circ (59862134)$;

(b) $\tau = (965) \circ (34769) \circ (4982) \circ (136)$

Esercizio 5. Dati i polinomi

$$f(X) = X^4 + \overline{4}X^3 + X^2 + \overline{5}X + \overline{1},\ g(X) = X^3 + \overline{6}X^2 + \overline{3}X + \overline{4} \in \mathbb{Z}_7[X],$$

determinare, con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, il massimo comune divisore monico di $f(X)$ e $g(X)$ e un'identità di Bezout per esso.

Esercizio 6. Fattorizzare il polinomio

$$f(X) = 3X^4 - X^3 - 6X - 2$$

in polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

Esercizio 7. Si consideri la corrispondenza

$$f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{12} \text{ definita da } [a]_{15} \mapsto 4[a]_{12}.$$

(a) Verificare che f è una funzione di insiemi (cioè, che non dipende dai rappresentanti).

(b) Per ogni $y \in \mathbb{Z}$, determinare $f^{-1}([y]_{12})$.