Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Appello B
9 Febbraio 2007

*Cognome*__________________ *Nome*__________________

*Numero di matricola*__________________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. Determinare tutte le relazioni di equivalenza sull'insieme

$$A := \{1, 2, 3\}.$$

Esercizio 2. Dimostrare per induzione su n che, scelti comunque $x, y \in \mathbb{R}$, risulta

$$\sum_{k=0}^{n}(x+ky)=\frac{1}{2}(n+1)(2x+ny).$$

Esercizio 3. Verificare che, se $MCD(a, n) = 1$ l'applicazione di insiemi

$$f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n \, ; \quad \overline{x} \mapsto \overline{ax}$$

è ben definita (cioè non dipende dai rappresentanti) ed è biiettiva.

Esercizio 4. Date le permutazioni

$$\sigma := (5361) \circ (3147)\,;\, \tau := (23) \circ (815) \circ (19) \in S_9,$$

Calcolare $\alpha := (\sigma \circ \tau)^{-1}$ e determinare l'ordine e la parità di α.

Esercizio 5. Dati i polinomi

$$f(X) := 2X^5 - 5X^3 - 4X^2 - 3X - 2,\ g(X) := 2X^4 - 7X^2 - 4 \in \mathbb{Q}[X],$$

determinare, con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, il massimo comune divisore monico di $f(X)$ e $g(X)$ e un'identità di Bezout per esso.

Esercizio 6. Fattorizzare il polinomio

$$f(X) := X^5 + X^4 + \overline{6}X^3 + \overline{6}X^2 + X + \overline{1}$$

in polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_7[X]$.

Esercizio 7. Calcolare le radici complesse del polinomio $X^4 + 3$.