Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 11 (22 Dicembre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Stabilire se i seguenti polinomi hanno radici multiple:
$$X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2\,; \quad X^4 + X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$$
$$X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{1}\,; \quad X^{10} + \overline{3}X^5 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$$

2. Determinare le radici complesse dei polinomi
$$X^2 - (2 + 3i); \quad 3X^3 + (1 + i).$$

3. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]\,, \mathbb{Q}[X]\,, \mathbb{R}[X]\,, \mathbb{C}[X]$:
$$21X + 3\,; \quad X^2 + X + 3\,; \quad X^3 - 1\,; \quad 2X^4 + 5X^2 + 2.$$

4. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$:
$$X^4 + 1\,; \quad X^5 - 1\,; \quad X^6 - 1\,; \quad X^6 - 8\ .$$

5. Usando il criterio di irriducibilità di Eisenstein, mostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Q}$:
$$X^{35} - 25X^{12} + 10X^7 - 15\,; \quad 33X^{123} + 6X^{21} + 1.$$

6. Dare un esempio di polinomio irriducibile su $\mathbb{Q}$ che non soddisfa il criterio di irriducibilità di Eisenstein.

7. Usando il criterio di irriducibilità modulo p, mostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Q}$:
$$49X^2 + 35X + 11\,; \quad 124X^3 - 119X^2 + 35X + 64\,; \quad X^5 - 4.$$