Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 2 (9 Ottobre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Supponiamo che gli studenti del secondo anno del Corso di Laurea in Matematica siano 200 e che essi abbiano superato almeno un esame. Supponiamo inoltre che 120 studenti abbiano superato l'esame di Geometria 1 e 130 l'esame di Analisi 1. Quanti studenti hanno superato tutti e due gli esami?

2. Determinare $P(\emptyset)$, $P(P(\emptyset))$, $P(P(P(\emptyset)))$.

3. Sia $A := \{a, b, c, d\}$. Determinare $P(A)$.

4. Dimostrare, senza fare il calcolo, che
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

5. Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false per $A = \{a\}$ e per $A = \{a, \{a\}\}$:

   $a \in A$; $a \in \{a\}$; $a \in \{\{a\}\}$; $\{a\} \in A$; $a \in P(A)$; $\{a\} \in P(A)$;
   $\{\{a\}\} \in P(A)$; $a \subseteq A$; $a \subseteq \{a\}$; $a \subseteq \{\{a\}\}$; $\{a\} \subseteq A$; $a \subseteq P(A)$;
   $\{a\} \subseteq P(A)$; $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$; $\emptyset \in A$; $\emptyset \in P(A)$; $\emptyset \in \{a\}$;
   $\emptyset \subseteq A$; $\emptyset \subseteq \{a\}$; $\emptyset \in \emptyset$ $\{\emptyset\} \in A$; $\{\emptyset\} \in P(A)$.

6. *Paradosso di Russel.* Ha senso considerare l'insieme T i cui elementi sono tutti gli insiemi? Se sì, allora $T \in T$, quindi un insieme può appartenere a se stesso. D'altra parte generalmente gli insiemi non appartengono a se stessi. Quindi possiamo considerare il sottoinsieme non vuoto N di T formato dagli insiemi che non appartengono a se stessi. Domanda: N appartiene a se stesso?

   Per evitare paradossi logici di questo tipo, nella teoria assiomatica di Zermelo-Fränkel non è lecito condiderare insiemi "troppo grandi", cioè definibili da proprietà troppo "poco selettive".

   Altre versioni di questo paradosso:

   - Cosideriamo la proposizione "Questa proposizione è falsa". Essa è vera o falsa?

   - Se dico "Io sto mentendo", dico la verità?

   - Supponiamo che in un villaggio il barbiere (uomo e barbuto!) faccia la barba a tutti gli uomini che non si radono da soli. Il barbiere si rade da solo?

7. Il professore dice allo studente: Sarai promosso soltanto se risponderai correttamente alla domanda: "Sarai promosso"?

   Per non essere bocciato, lo studente deve rispondere SI oppure NO?

8. Sia $A = \{-1, -2, 0, 1, 2, 3\}$ e si considerino le seguenti relazioni definite su A :

   (a) $a\,\rho\,b \Leftrightarrow b = 2a$;

   (b) $a\,\rho\,b \Leftrightarrow b = 3a - 1$;

   (c) $a\,\rho\,b \Leftrightarrow a - b = 1$;

   (d) $a\,\rho\,b \Leftrightarrow b = \mid a \mid + 1$.

   Determinare la relazione ρ^{-1} definita da

   $$x\rho^{-1}y \iff y\rho x.$$

   Determinare inoltre i grafici di ρ e di ρ^{-1}.

9. Svolgere l'esercizio precedente quando $A = \mathbb{R}$.

10. Sia $X = \{1, 2, 3\}$. Determinare su X delle relazioni che abbiano soltanto una o due tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva.

11. Sia $A := \{a, b, c\}$. Disegnare il diagramma di $(P(A), \subseteq)$. Determinare gli eventuali elementi massimali e minimali, massimi e minimi.

12. Sia $A := \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Ordinare A secondo la divisibilità. Disegnare il diagramma di questo insieme ordinato e determinare gli eventuali elementi massimali e minimali, massimi e minimi.

13. Mostrare che un insieme ordinato finito ha sempre almeno un elemento massimale e almeno un elemento minimale.

14. Sia S l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}$, cioè $S = P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Si consideri in S la relazione definita da:

    $$X \preccurlyeq Y \iff X = Y \quad \text{oppure} \quad x \leq y \quad \text{per ogni} \quad x \in X \quad \text{e} \quad y \in Y.$$

    Verificare che questa relazione è una relazione di ordine su S e stabilire se S ha elementi massimali o minimali .

15. Sia $(X, \leq)$ un insieme odinato. In $X \times X$ definiamo la relazione

    $$(a, b) \preccurlyeq (c, d) \quad \iff \quad a < c \quad \text{oppure} \quad a = c \quad \text{e} \quad b \leq d.$$

    Mostrare che questa relazione è una relazione di ordine. Essa si chiama l'*ordine lessicografico* indotto da $\leq$.

    Mostrare inoltre che se $(X, \leq)$ è linearmente ordinato, $(X \times X, \preccurlyeq)$ è linearmente ordinato.